SOLUCIONES DE LOS EJERCICIOS DE REPASO DE 1º DE BACHILLER DE CIENCIAS SOCIALES. HOJA 1

Ejercicio nº 1.-

a) Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$\log_3 \frac{1}{9} - \log_3 \sqrt{3} + \log_3 81$$

b) Calcula el valor de *x*, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log x = \log 102 - \log 34$$

Solución:

a) $\log_3 3^{-2} - \log_3 3^{1/2} + \log_3 3^4 = -2 - \frac{1}{2} + 4 = \frac{3}{2}$

b) $\log x = \log \frac{102}{34} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{102}{34} = 3$

Ejercicio nº 2.-

Calcula y simplifica:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x} \right) \cdot \frac{x^2 + x}{2}$$

Solución:

$$\left(\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x} \right) \cdot \frac{x^2 + x}{2} = \frac{x^2 - (x+1)(x-1)}{x(x-1)} \cdot \frac{x^2+x}{2} = \frac{x^2 - (x^2-1)}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x^2 - x^2 + 1}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x+1)}{2} =$$

$$= \frac{1}{x(x-1)} \cdot \frac{x(x+1)}{2} = \frac{x(x+1)}{2x(x-1)} = \frac{x+1}{2(x-1)} = \frac{x+1}{2x-2}$$

Ejercicio nº 3.-

Resuelve:

a) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y = 5 - \sqrt{x}} \\ \boldsymbol{x = y^2 - 2y + 1} \end{array}\right\}$

b) $\boldsymbol{\dfrac{2(x-3)}{3} - \dfrac{x+1}{3} > x - 2}$

Solución:

a) $x = \left(5 - \sqrt{x}\right)^2 - 2\left(5 - \sqrt{x}\right) + 1$

$x = 25 + x - 10\sqrt{x} - 10 + 2\sqrt{x} + 1$

$8\sqrt{x} = 16 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{x} = 2 \quad \Rightarrow \quad x = 4, \quad y = 3$

b) $2(x-3) - (x+1) > 3(x-2)$

$2x - 6 - x - 1 > 3x - 6$

$-1 > 2x$

$x < \dfrac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad \text{Intervalo } \left(-\infty, \dfrac{-1}{2}\right)$

<u>Ejercicio nº 4.-</u>

Calcula los límites siguientes y representa gráficamente los resultados que obtengas:

a) $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}}$

b) $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}}$

c) $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4}}$

Solución:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \dfrac{-2}{4} = \dfrac{-1}{2}$

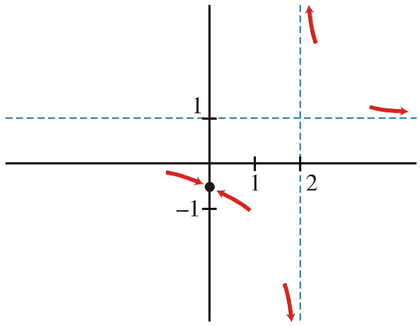
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = 1$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x+1)}{(x-2)}$

Hallamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{x+1}{x-2} = -\infty; \quad \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x+1}{x-2} = +\infty$

• Representación:



Ejercicio nº 5.-

Halla la función derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x^4 - \dfrac{9x^2}{3}$

b) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 2}{x^2 - 1}$

c) $f(x) = xe^x$

Solución:

a) $f'(x) = 12x^3 - \dfrac{18x}{3}$

b) $f'(x) = \dfrac{6x(x^2 - 1) - (3x^2 - 2) \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{6x^3 - 6x - 6x^3 + 4x}{(x^2 - 1)^2} = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

c) $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$

Ejercicio nº 6.-

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 2x - 3x^2$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Halla los tramos en los que $f(x)$ es creciente y en los que es decreciente.

Solución:

a)
- $f'(x) = 2 - 6x$
- La pendiente de la recta es $f'(2) = -10$.
- Cuando $x = 2$, $y = -8$.
- La recta será:

$y = -8 - 10(x-2) = -8 - 10x + 20 = -10x + 12$

b) • Estudiamos el signo de la derivada:

$2 - 6x > 0 \quad \Rightarrow \quad 2 > 6x \quad \Rightarrow \quad x < \frac{2}{6} \quad \Rightarrow \quad x < \frac{1}{3}$

$2 - 6x < 0 \quad \Rightarrow \quad 2 < 6x \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{6} \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{3}$

- Es creciente en $\left(-\infty, \frac{1}{3}\right)$ y decreciente en $\left(\frac{1}{3}, +\infty\right)$, y tiene un máximo en $x = \frac{1}{3}$.

Ejercicio nº 7.-

a) Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x + 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Representa su gráfica.

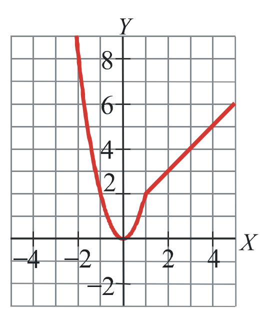
Solución:

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua.
- Si $x = 1$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(2x^2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \text{ También es continua en } x = 1.$$

- Es una función continua.

b) • Si $x \le 1$, es un trozo de parábola.
- Si $x > 1$, es un trozo de recta.
- La gráfica es:



Ejercicio nº 8.-

a) Representa la gráfica de la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}}$$

b) Sobre la gráfica anterior, estudia el dominio de $f(x)$ su continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty}\left(x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2}\right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow \quad x^4 - 2x^2 + \frac{1}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad 2x^4 - 4x^2 + 1 = 0$

Cambio: $x^2 = z \quad \rightarrow \quad 2z^2 - 4z + 1 = 0$

$$z = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 8}}{4} \rightarrow \begin{cases} z = 1{,}7 \rightarrow x = \pm 1{,}3 \\ z = 0{,}3 \rightarrow x = \pm 0{,}5 \end{cases}$$

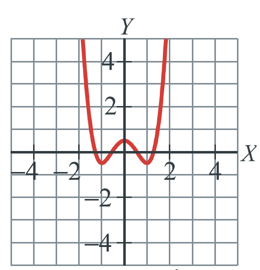
Puntos $(-1{,}3;\ 0)$; $(1{,}3;\ 0)$; $(-0{,}5;\ 0)$; $(0{,}5;\ 0)$

Con el eje $Y \rightarrow \quad x = 0 \quad \rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \rightarrow$ Punto $\left(0, \frac{1}{2}\right)$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{Punto}\left(-1, \frac{-1}{2}\right) \\ x = 0 \rightarrow \text{Punto}\left(0, \frac{1}{2}\right) \\ x = 1 \rightarrow \text{Punto}\left(1, \frac{-1}{2}\right) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x)=x^4- 2x^2+\frac{1}{2}$

b) • Dominio = **R**

- Es una función continua.
- Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$ y creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.

Ejercicio nº 9.-

a) Representa la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{3}{x^2 - 4x}$$

b) Ayúdate de la gráfica para estudiar la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f(x).*

Solución:

a) • Dominio = **R** - {0, 4}
• Puntos de corte con los ejes:

No corta al eje X, pues $f(x) \neq 0$.
No corta al eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

• Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 4$.

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$$
$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$$

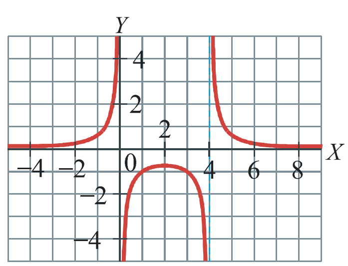
• Asíntota horizontal: $y = 0$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = \frac{-3(2x - 4)}{\left(x^2 - 4x\right)^2} = 0 \Rightarrow x = 2 \rightarrow \text{Punto}\left(2, \frac{-3}{4}\right)$$

• Gráfica:



$f(x) = \dfrac{3}{x^2 - 4x}$

b) • Continuidad:
Si $x \neq 0$ y $x \neq 4$, es continua.
En $x = 0$ y en $x = 4$ es discontinua, pues tiene dos ramas infinitas (asíntotas verticales).

- Es creciente en $(-\infty, 0) \cup (0, 2)$ y decreciente en $(2, 4) \cup (4, +\infty)$