SOLUCIONES CC SS 1º BLOQUE 2

Ejercicio nº 1.-

a) Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$\log_2 256 - \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_2 \sqrt{2}$$

b) Halla el valor de *x*, aplicando las propiedades de los logaritmos:

$$\log x = 3\log 2 - 2\log 3$$

Solución:

a) $\log_2 2^8 - \log_3 3^{1/3} + \log_2 2^{1/2} = 8 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{49}{6}$

b) $\log x = \log 2^3 - \log 3^2 = \log \frac{2^3}{3^2} = \log \frac{8}{9} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8}{9}$

Ejercicio nº 2.-

Opera y simplifica:

$$\frac{x+4}{x-3} - \frac{2x^2+4x}{x^2-9} + \frac{x}{x+3}$$

Solución:

$$\frac{x+4}{x-3} - \frac{2x^2+4x}{x^2-9} + \frac{x}{x+3} = \frac{(x+4)(x+3)}{x^2-9} - \frac{2x^2+4x}{x^2-9} + \frac{x(x-3)}{x^2-9} =$$

$$= \frac{x^2+3x+4x+12-2x^2-4x+x^2-3x}{x^2-9} = \frac{12}{x^2-9}$$

Ejercicio nº 3.-

Resuelve:

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$

b) $\frac{x-4}{2} - \frac{x+1}{3} \le \frac{1}{6}$

Solución:

a) $y=\dfrac{6}{x} \quad\rightarrow\quad x^2+\dfrac{36}{x^2}=13 \quad\rightarrow\quad x^4+36=13x^2 \quad\rightarrow\quad x^4-13x^2+36=0$

Cambio: $x^2=z$. Así,

$z^2-13z+36=0$

$$z=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{13\pm 5}{2} \quad\rightarrow\quad \begin{cases} z=9 \;\rightarrow\; x=\pm 3 \\ z=4 \;\rightarrow\; x=\pm 2 \end{cases}$$

Soluciones: $\begin{cases} x_1=-3 \\ y_1=-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_2=3 \\ y_2=2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_3=-2 \\ y_3=-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x_4=2 \\ y_4=3 \end{cases}$

b) $3(x-4)-2(x+1)\leq 1$

$3x-12-2x-2\leq 1$

$x\leq 15 \quad\rightarrow\quad$ Intervalo $\quad(-\infty,\ 15]$

Ejercicio nº 4.-

Resuelve los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}$

Solución:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}=\frac{4}{32}=\frac{1}{8}$

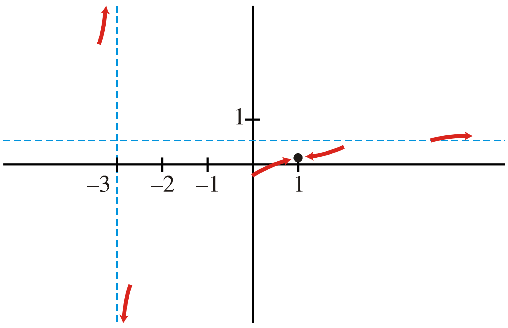
b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}=\frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2+3x}{2x^2+12x+18}=\lim_{x\to -3}\frac{x(x+3)}{2(x+3)^2}=\lim_{x\to -3}\frac{x}{2(x+3)}$

Hallamos los límites laterales:

$$\lim_{x\to -3^-}\frac{x}{2(x+3)}=+\infty; \qquad \lim_{x\to -3^+}\frac{x}{2(x+3)}=-\infty$$

- Representación:



Ejercicio nº 5.-

Halla $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^7$

b) $f(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x$

c) $f(x) = \frac{3x}{x^2 + 2}$

Solución:

a) $f'(x) = 2x^3 - \frac{21}{5}x^6$

b) $f'(x) = e^x \cdot \operatorname{sen} x + e^x \cdot \cos x = (\operatorname{sen} x + \cos x)e^x$

c) $f'(x) = \frac{3(x^2+2) - 3x \times 2x}{(x^2+2)^2} = \frac{3x^2 + 6 - 6x^2}{(x^2+2)^2} = \frac{-3x^2+6}{(x^2+2)^2}$

Ejercicio nº 6.-

a) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = x^2 - 3x$ en el punto de la abscisa $x = -1$.
b) ¿Es creciente o decreciente $f(x)$ en $x = 2$?

Solución:

a)
- $f'(x) = 2x - 3$.
- La pendiente de la recta es $f'(-1) = -5$.
- Cuando $x = -1$, $y = 4$.
- La recta será:

$$y = 4 - 5(x + 1) = 4 - 5x - 5 = -5x - 1$$

b) $f'(2) = 1 > 0 \rightarrow$ Es creciente en $x = 2$.

Ejercicio nº 7.-

a) Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x^2 & \text{si} \quad x \le 1 \\ x+1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$$

b) Representa su gráfica.

Solución:

a) • Si $x \neq 1$, la función es continua.

• Si $x = 1$:

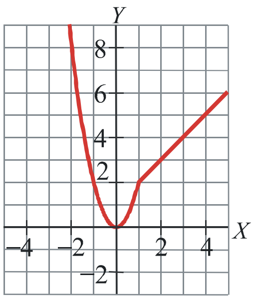
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} \left(2x^2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = 2 \\ f(1) = 2 \end{array}\right\} \text{ También es continua en } x = 1.$$

• Es una función continua.

b) • Si $x \le 1$, es un trozo de parábola.

• Si $x > 1$, es un trozo de recta.

• La gráfica es:



Ejercicio nº 8.-

a) Representa gráficamente la siguiente función:

$$f(x) = x^4 - 8x^2$$

b) Ayudándote de la gráfica, estudia el dominio de *f(x),* su continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x^4 - 8x^2\right) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x^4 - 8x^2\right) = +\infty$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \rightarrow x^4 - 8x^2 = x^2\left(x^2 - 8\right) = 0 \rightarrow$

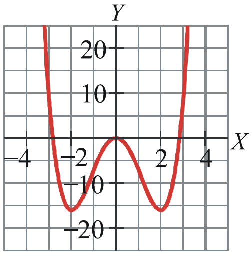
$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = -\sqrt{8} = -2{,}8 \rightarrow \text{Punto } (-2{,}8; 0) \\ x = -\sqrt{8} = 2{,}8 \rightarrow \text{Punto } (2{,}8; 0) \end{cases}$$

Con el eje $Y \rightarrow x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow$ Punto $(0, 0)$

- Puntos singulares:

$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x\left(x^2 - 4\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{Punto } (0, 0) \\ x = -2 = \rightarrow \text{Punto } (-2, -16) \\ x = 2 = \rightarrow \text{Punto } (2, -16) \end{cases}$$

- Gráfica:



$f(x)=x^4-8x^2$

b) • Dominio $= \mathbb{R}$

- Es una función continua.
- Es decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$ y creciente en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$.

Ejercicio nº 9.-

a) Representa gráficamente la función:

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{x+2}}$$

b) A partir de la gráfica, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de *f(x)*.

Solución:

a) • Dominio $= \mathbb{R} - \{-2\}$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to x^2 = 0 \to x = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

Con el eje $Y \to x = 0 \to y = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

• Asíntota vertical: $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = -\infty \, ; \quad \lim_{x \to -2^+} f(x) = +\infty$$

• Asíntota oblicua:

$$\frac{x^2}{x+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2} \quad \Rightarrow \quad y = x - 2 \quad \text{es asíntota oblicua.}$$

Si $x \to +\infty$, $\dfrac{4}{x+2} > 0 \Rightarrow$ La curva está por encima de la asíntota.

Si $x \to -\infty$, $\dfrac{4}{x+2} < 0 \Rightarrow$ La curva está por debajo de la asíntota.

• Puntos singulares:

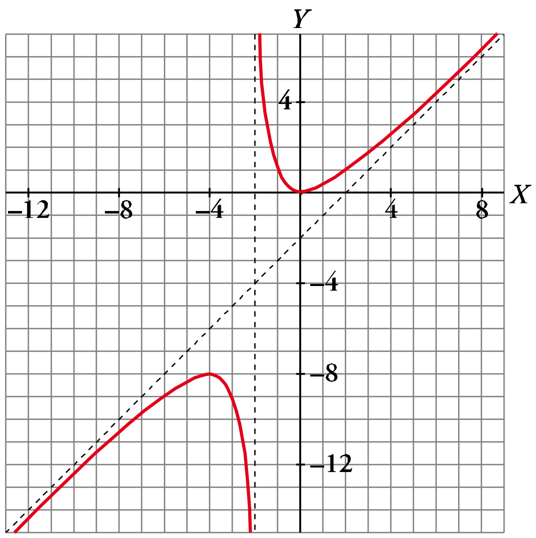
$$f'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{2x^2 + 4x - x^2}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = 0$$

$\nearrow x = 0 \to$ Punto $(0, 0)$

$\searrow x = -4 \to$ Punto $(-4, -8)$

• Gráfica:



$$f(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

b) • Continuidad:

Si $x \neq -2$, es continua.

Si $x = -2$, es discontinua, pues tiene una rama infinita (asíntota vertical).

- Es creciente en $(-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ y decreciente en $(-4, -2) \cup (-2, 0)$