# 120 ejercicios de repaso de ESO: NÚMERO REAL, POLINOMIOS, ECUACIONES, INECUACIONES y SISTEMAS

# 120 ejercicios de repaso de NÚMERO REAL, POLINOMIOS, ECUACIONES, INECUACIONES y SISTEMAS

## Repaso de polinomios:

**1.** Dados $P(x) = 4x^5 - 8x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 1$ y $Q(x) = 4x^3 - 4x^2 + 2x$, se pide:

- **a)** Extraer el máximo factor común de Q(x)
- **b)** $P(x) - 2x \cdot Q(x)$ (Sol: $4x^5-16x^4+10x^3-2x^2+1$)
- **c)** $Q(x) \cdot Q(x)$ (Sol: $16x^6-32x^5+32x^4-16x^3+4x^2$)
- **d)** P(x) **:** Q(x) , con comprobación (Sol: $C(x)=x^2-x-1$; $R(x)=2x+1$)

RECORDAR:

$$\boxed{\begin{array}{l}(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \\ (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \\ (A+B)(A-B) = A^2 - B^2\end{array}}$$

**2.** Desarrollar, aplicando las **igualdades notables** correspondientes:

- **a)** $(x+2)^2=$
- **b)** $(x-3)^2=$
- **c)** $(x+2)\,(x-2)=$
- **d)** $(3x+2)^2=$
- **e)** $(2x-3)^2=$
- **f)** $(5x+4)\,(5x-4)=$
- **g)** $(x^2+5)^2=$
- **h)** $(x^3-2)^2=$
- **i)** $(x^2-1)\,(x^2+1)=$
- **j)** $(2x^2+3x)^2=$
- **k)** $(2x^2-3)^2=$
- **l)** $(-x-3)^2=$
- **m)** $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=$
- **n)** $\left(2a-\frac{3}{2}\right)^2=$
- **o)** $\left(1+\frac{x}{2}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)=$
- **p)** $\left(2x+\frac{3}{4}\right)^2=$
- **q)** $\left(\frac{3}{2}-\frac{x}{4}\right)^2=$
- **r)** $\left(2+\frac{a}{3}\right)\left(-\frac{a}{3}+2\right)=$
- **s)** $\left(\frac{3x}{2}-\frac{1}{x}\right)^2=$
- **t)** $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x^2}{2}+\frac{x}{3}\right)=$
- **u)** $\left(\frac{3}{2}x+\frac{1}{4}\right)^2=$

(Sol: **m)** $x^2+x+\frac{1}{4}$; **n)** $4a^2-6a+\frac{9}{4}$; **o)** $1-\frac{x^2}{4}$; **p)** $4x^2+3x+\frac{9}{16}$; **q)** $\frac{9}{4}-\frac{3x}{4}+\frac{x^2}{16}$; **r)** $4-\frac{a^2}{9}$ **s)** $\frac{9}{4}x^2-3+\frac{1}{x^2}$; **t)** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{9}$; **u)** $\frac{9}{4}x^2+\frac{3x}{4}+\frac{1}{16}$)

**3.** Dados $P(x)=4x^3+6x^2-2x+3$, $Q(x)=2x^3-x+7$ y $R(x)=7x^2-2x+1$, hallar:

- **a)** El valor numérico de P(x) para x=-2 (Sol: -1)
- **b)** La factorización de R(x) (Sol: polin. irreducible)
- **c)** P(x)+Q(x)+R(x) (Sol: $6x^3+13x^2-5x+11$)
- **d)** P(x)-Q(x)-R(x) (Sol: $2x^3-x^2+x-5$)
- **e)** P(x)+3Q(x) -2R(x) (Sol: $10x^3-8x^2-x+22$)
- **f)** P(x) **:** (x+2) por Ruffini, y comprobar (Sol: $C(x)=4x^2-2x+2$; $R(x)=-1$)

**4.** Operar y simplificar:

- **a)** $(x+1)^2+(x-2)(x+2)=$
- **b)** $(3x-1)^2-(2x+5)(2x-5)=$

**c)** $(2x+3)(-3+2x)-(x+1)^2=$

**d)** $(-x+2)^2-(2x+1)^2-(x+1)(x-1)=$

**e)** $-3x+x(2x-5)(2x+5)-(1-x^2)^2=$

**f)** $(3x-1)^2-(-5x^2-3x)^2-(-x+2x^2)(2x^2+x)=$

(Sol: **a)** $2x^2+2x-3$; **b)** $5x^2-6x+26$; **c)** $3x^2-2x-10$; **d)** $-4x^2-4x+4$; **e)** $-x^4+4x^3+2x^2-28x-1$; **f)** $-29x^4-30x^3+x^2-6x+1$)

**5.** Dados $P(x)=6x^4+11x^3-28x^2-15x+18$ y $Q(x)=3x-2$, se pide:

**a)** Factorizar P(x), por Ruffini [Sol: (3x-2)(2x-3)(x+1)(x+3)]

**b)** $P(x)\cdot Q(x)-2x^2Q(x)$ (Sol: $18x^5+21x^4-112x^3+15x^2+84x-36$)

**c)** P(x) **:** Q(x) [Sol: $C(x)=2x^3+5x^2-6x-9$; $R(x)=0$]

**6.** Dados $P(x)=x^6+6x^5+9x^4-x^2-6x-9$ y $Q(x)=x^2-9$, se pide:

**a)** Factorizar P(x), por Ruffini [Sol: $(x+1)(x-1)(x+3)^2(x^2+1)$]

**b)** $P(x)-Q(x)\cdot Q(x)$ (Sol: $x^6+6x^5+8x^4+17x^2-6x-90$)

**c)** P(x) **:** Q(x) [Sol: $C(x)=x^4+6x^3+18x^2+54x+161$; $R(x)=480x+1440$]

## Repaso de ecuaciones:

**7.** Resolver, y comprobar[1] en los casos indicados:

**1)** $x^4-x^3-16x^2+4x+48=0$ por Ruffini + comprobación (Sol: $x_1=2$; $x_2=-2$; $x_3=-3$; $x_4=4$)

**2)** $x^4-13x^2+36=0$ + comprobación (Sol: x= 2; x= 3)

**3)** $\frac{2x}{15}-\frac{3x-5}{20}=\frac{x}{5}-3$ + comprobación (Sol: x=15)

**4)** $3-\frac{2(5-x)}{8}=4-\frac{1-x}{6}$ + comprobación (Sol: x=25)

**5)** $(x+1)^2-(x-2)^2=(x+3)^2+x^2-20$ + comprobación (Sol: x= 2)

**6)** $\frac{x-3}{4}=(x-2)(x+7)+17$ + comprobación (Sol: $x_1=-1$; $x_2=-15/4$)

**7)** $x-\sqrt{x-3}=3$ (Sol: $x_1=3$; $x_2=4$)

**8)** $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-3}{2}=\frac{x-2}{3}+\frac{29}{6}$ + comprobación (Sol: x=4)

**9)** $x+\sqrt{x}=2$ (Sol: x=1)

**10)** $x^3-3x^2+3x-1=0$ por Ruffini + comprobación (Sol: x=1)

**11)** $x^4+x^2-2=0$ + comprobación (Sol: x= 1)

**12)** $\frac{1}{\sqrt{5x+14}}=\frac{1}{7}$ + comprobación (Sol: x=7)

[1] Se recuerda que las ecuaciones en las que la incógnita aparece en el denominador, así como las ecuaciones irracionales, es decir, aquellas en las que la incógnita aparece bajo el signo radical, suelen requerir habitualmente comprobación.

**13)** $x^4-4x^2=0$ + comprobación (Sol: x=0; x= 2)

**14)** $\frac{3(x+1)}{2}-x=\frac{x-4}{3}$ + comprobación (Sol: x=-17)

**15)** $\frac{x^2+2}{3}-\frac{x^4-8}{2}=-2$ + comprobación (Sol: x= 2)

**16)** $x+\sqrt{x^2+2x}=6$ (Sol: x=18/7)

**17)** $x-\sqrt{2x-4}=6$ (Sol: x=10)

**18)** $x(x^2-4)(3x+12)=0$ igualando a 0 cada factor + comprobación (Sol: x=0; x=-4; x= 2)

**19)** $\frac{3x-2}{4}-\frac{5x-2}{8}+3\left(x-\frac{4x-1}{2}\right)=3x$ (Sol: x=10/47)

**20)** $x^3-2x^2-2x-3=0$ por Ruffini + comprobación (Sol: x=3)

**21)** $\frac{3x^2-1}{4}+\frac{1}{2}\left(x^2-2-\frac{1}{2}x\right)=\frac{x^2-5}{4}$ (Sol: $x_1$=0; $x_2$=1/4)

**22)** $(2x-7)(x+3)^2=0$ igualando a 0 cada factor + comprobación (Sol: $x_1$=7/2; $x_2$=-3)

**23)** $(x+2)^2(x-1)^2=0$ igualando a 0 cada factor + comprobación (Sol: $x_1$=-2; $x_2$=1)

**24)** $\frac{x^2(x^2+7)}{2}+\frac{x^2+11}{3}=-\frac{3x^4+7x^2+2}{6}$ (Sol: ∄ soluc.)

**25)** $\frac{x+2}{2}-3(x+1)=-\frac{5x}{2}-2$ (Sol: Es una identidad, es decir, se verifica $\forall x\in\mathbb{R}$)

**26)** $x^3+x^2-6x=0$ factorizando previamente + comprobación (Sol: x1=0; x2=2; x3=-3)

**27)** $\frac{x}{x+1}+\frac{x+2}{x-1}=\frac{14}{3}$ + comprobación (Sol: $x_1$=2; $x_2$=-5/4)

**28)** $6+\sqrt{2x+3}=x$ (Sol: x=11)

**29)** $(x+2)(x-2)+2=x(2-x^2)$ + comprobación (Sol: x=-1; x= √2)

**30)** $x^4-2x^3+x^2=0$ factorizando previamente + comprobación (Sol: x1=0; x2=1)

**31)** $\left(x+2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)\left(x-2\sqrt{\frac{6}{5}}\right)=\frac{1}{x^2}$ (Sol: x= √5)

**32)** $\frac{4-x}{5}-\frac{1-2x}{3}=1+x$ + comprobación (Sol: x=-17)

**33)** $\frac{(2x^2+3)(2x^2-3)}{2}-\frac{(2x-3)^2}{3}=4x-\frac{41}{6}$ + comprobación (Sol: x= ±1)

**34)** $\frac{(3x+2)(3x-2)}{2}-\frac{(3x+2)^2}{3}=\frac{(2x-3)^2}{4}$ $\left(\text{Sol: } x=\frac{6\pm\sqrt{438}}{6}\right)$

**35)** $\sqrt{x+5}=7-\sqrt{2x+8}$ (Sol: x=4)

**36)** $\frac{3}{4}\left[2x-\left(1-\frac{x+2}{3}\right)\right]=\frac{2-x}{5}$ + comprobación (Sol: x=1/3)

**37)** $\sqrt{x+5}+\sqrt{x}=5$ (Sol: x=4)

**38)** $\frac{3}{4}\left(x-\frac{5}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{12}+\frac{1}{6}\right)=\frac{1+x}{3}$ (Sol: x=163/28)

**39)** $\sqrt{3x+1}-1=\sqrt{2x-1}-2$ (Sol: $\nexists$ soluc.)

**40)** $\frac{3}{x+3}=\frac{x+2}{2-x}$ (Sol: $x_1=0$, $x_2=-8$)

**41)** $\frac{1}{x}+\frac{2}{x}+\frac{3}{x}=\frac{x}{3}-1$ (Sol: $x_1=6$, $x_2=-3$)

**42)** $\frac{x+1}{3}-\frac{x-2}{5}=1+\frac{2x-3}{15}$ (Sol: $\nexists$ soluc.)

**43)** $\frac{1+96\frac{1}{480}}{96x}=\frac{1}{1600}$ + comprobación (Sol: x=20)

**44)** $\frac{8}{x+6}+\frac{12-x}{x-6}=1$ (Sol: $x_1=10$, $x_2=-3$)

**45)** $\frac{3x^2+1}{6x+1}=\frac{6x-1}{3x^2-1}$ + comprobación (Sol: x=0; $x=\pm 2$)

**46)** $-x^2-x=0$ + comprobación (Sol: $x_1=0$, $x_2=-1$)

**47)** $\sqrt{3}=\frac{2x}{1-x^2}$ $\left(\text{Sol}: x_1=\sqrt{3}/3,\ x_2=-\sqrt{3}\right)$

**48)** $(x^2+1)^4=625$ + comprobación (Sol: $x=\pm 2$)

**49)** $\frac{x}{x-3}+\frac{2x}{x+3}=\frac{6}{x^2-9}$ (Sol: $x_1=2$, $x_2=-1$)

**50)** $(x^2-1)^4=0$ + comprobación (Sol: $x=\pm 1$)

**51)** $\frac{x^4}{10}=8x$ (Sol: $x_1=0$, $x_2=2\sqrt[3]{10}$ )

**52)** $\frac{\sqrt{x}}{x}=0$ (Sol: $\nexists$ soluc.)

**53)** $\sqrt{x^2+4x+4}=1$ + comprobación (Sol: $x_1=-1$, $x_2=-3$)

**54)** $x^6-16x^2=0$ + comprobación (Sol: x=0, $x=\pm 2$)

**55)** $\sqrt[3]{x+5}=2$ + comprobación (Sol: x=3)

**56)** $x^3=3x$ + comprobación (Sol: $x_1=0$, $x_2=\sqrt{3}$; $x_3=-\sqrt{3}$)

**57)** $3\left(\frac{11x}{6}-x\right)-4=2x-3\left(1-\frac{x}{6}\right)$ [Sol: $\nexists$ soluc.]

**58)** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x+7}=4$ (Sol: x=114)

**59)** $\frac{x-2}{x-1}-\frac{x^2}{x^2-3x+2}=\frac{x-1}{x-2}$ (Sol: $x=-3$)

**60)** $2\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}=4$ (Sol: x=5; x=13/9)

**61)** $\frac{\sqrt{2}}{x}=\sqrt{2}\,x-\frac{x}{\sqrt{2}}$ (Sol: x=±√2)

**62)** $\frac{5}{x+2}=\frac{3}{2}-\frac{x}{x+3}$ (Sol: $x_1=3$; $x_2=-4$)

**8.** **TEORÍA:** **a)** ¿Qué es el discriminante de una ecuación de 2º grado? ¿Qué indica? Sin llegar a resolverla, ¿cómo podemos saber de antemano que la ecuación $x^2+x+1$ carece de soluciones?

**b)** Inventar una ecuación de 2º grado con raíces $x_1=2/3$ y $x_2=2$, y cuyo coeficiente cuadrático sea 3

**c)** Sin resolver y sin sustituir, ¿cómo podemos asegurar que las soluciones de $x^2+5x-300=0$ son $x_1=15$ y $x_2=-20$?

**d)** Calcular el valor del coeficiente **b** en la ecuación $x^2+bx+6=0$ sabiendo que una de las soluciones es 1. Sin necesidad de resolver, ¿cuál es la otra solución?

## Repaso de SS.EE.:

**9.** Resolver los siguientes **sistemas de ecuaciones lineales** por el método indicado (si no se dice nada, se deja ad libitum), y **hacer siempre la comprobación**:

**1)** $\left.\begin{array}{r} 2x-3y=-4 \\ 3x-y=1 \end{array}\right\}$ por sustitución (Sol: x=1, y=2)

**2)** $\left.\begin{array}{r} x-2y=-4 \\ x+5y=3 \end{array}\right\}$ por igualación (Sol: x=-2, y=1)

**3)** $\left.\begin{array}{r} 3x-y=13 \\ x+2y=2 \end{array}\right\}$ por reducción (Sol: x=4, y=-1)

**4)** $\left.\begin{array}{r} 7x+6y=-4 \\ 2x+2y=-2 \end{array}\right\}$ por reducción (Sol: x=2, y=-3)

**5)** $\left.\begin{array}{r} 2x+5y=-4 \\ x+y=-2 \end{array}\right\}$ por sustitución (Sol: x=-2, y=0)

**6)** $\left.\begin{array}{r} 3x-y=6 \\ -3x+y=0 \end{array}\right\}$ por igualación (Sol: x=1, y=-3)

**7)** $\left.\begin{array}{r} x-2y=6 \\ -3x+2y=-10 \end{array}\right\}$ por igualación (Sol: x=2, y=-2)

**8)** $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ 3x+2y=5 \end{array}\right\}$ por reducción (Sol: x=1, y=1)

**9)** $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ 6x+9y=15 \end{array}\right\}$ (Sol: ∞ soluc.; comp .indtdo.)

**10)** $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=9 \\ 6x-4y=4 \end{array}\right\}$ (Sol: ∄ soluc ; incompatible)

**11)** $\left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$ (Sol: x=5, y=0)

**12)** $\left.\begin{array}{r} 4x+3y=0 \\ 2x-7y=0 \end{array}\right\}$ (Sol: x=0, y=0)

**13)** $\left.\begin{array}{r} 3x+5=2y+1 \\ x-9=1-5y \end{array}\right\}$ (Sol: x=0, y=2)

**14)** $\left.\begin{array}{r} 2x+3y=5 \\ -4x-6y=-6 \end{array}\right\}$ (Sol: ∄ soluc ; incompatible)

**15)** $\left.\begin{array}{r} 3x-2y=9 \\ -6x+4y=-18 \end{array}\right\}$ (Sol: ∞ soluc.; comp. indtdo.)

**16)** $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{2}+3y=4 \\ x-2y=0 \end{array}\right\}$ (Sol: x=2, y=1)

**17)** $\left.\begin{array}{r} -x+5y=-13 \\ \frac{x}{3}-\frac{3y}{2}=4 \end{array}\right\}$ (Sol: x=3, y=-2)

**18)** $\left.\begin{array}{r} \frac{x}{3}-\frac{y}{2}=4 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{4}=2 \end{array}\right\}$ (Sol: x=0, y=-8)

**19)** $\left.\begin{array}{r}\frac{x+1}{3}+y=1\\ \frac{x-3}{4}+2y=1\end{array}\right\}$ (Sol: x=-1, y=1)

**20)** $\left.\begin{array}{r}\frac{3(x-2)}{4}+\frac{2(y-3)}{5}=\frac{2}{5}\\ \frac{2(y-4)}{3}+\frac{3(x-1)}{2}=\frac{3}{2}\end{array}\right\}$ (Sol: x=2, y=4)

**21)** $\left.\begin{array}{r}\frac{20x+7}{9}-\frac{4x+y}{2}=2\\ \frac{7x+1}{4}-\frac{2(x-y)}{6}=x\end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=−2)

**22)** $\left.\begin{array}{r}\frac{3(x-1)}{2}+\frac{2(y-2)}{3}=\frac{13}{6}\\ \frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(y+2)}{5}=\frac{5}{2}\end{array}\right\}$ (Sol: x=2, y=3)

**23)** $\left.\begin{array}{r}\frac{x+1}{2}-\frac{y-2}{3}=\frac{1}{3}\\ \frac{x}{3}+\frac{y+1}{2}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ (Sol: x=-15/13,y=10/13)

**24)** $\left.\begin{array}{r}x-y+z=6\\ 2x+y-3z=-9\\ -x+2y+z=-2\end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=-2; z=3)

**25)** $\left.\begin{array}{r}2x+y-z=0\\ x-2y+3z=13\\ -x+y+4z=9\end{array}\right\}$ (Sol: x=2, y=-1; z=3)

**26)** $\left.\begin{array}{r}2x-5y+3z=4\\ x-2y+z=3\\ 5x+y+7z=11\end{array}\right\}$ (Sol: x=5, y=0; z=-2)

**27)** $\left.\begin{array}{r}3x+2y-z=2\\ 4x-3y+5z=9\\ 2x+4y-z=1\end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=0; z=1)

**28)** $\left.\begin{array}{r}x+y-3z=1\\ 2x-4y+z=3\\ -3x+3y-5z=-11\end{array}\right\}$ (Sol: x=3, y=1; z=1)

**29)** $\left.\begin{array}{r}x+y-2z=9\\ 2x-y+4z=4\\ 2x-y+6z=-1\end{array}\right\}$ (Sol: x=6, y=-2; z=-5/2)

**30)** $\left.\begin{array}{r}x+y+z=2\\ 2x+3y+5z=11\\ x-5y+6z=29\end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=-2; z=3)

**31)** $\left.\begin{array}{r}x+y+z=1\\ 2x-y-3z=0\\ -x+2y-2z=-5\end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=-1; z=1)

**10. TEORÍA: a)** Inventar un sistema compatible determinado que tenga por solución x=2, y= −3

**b)** Inventar un sistema compatible indeterminado y razonar por qué tiene $\infty$ soluciones.

**c)** Inventar un sistema incompatible y razonar por qué no tiene solución.

**d)** Resolver los siguientes sistemas e indicar de qué tipo se tratan:

$\left.\begin{array}{r}4x-3y=5\\ 2x+y=5\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}4x-3y=5\\ -8x+6y=-10\end{array}\right\}$ $\left.\begin{array}{r}4x-3y=5\\ 12x-9y=3\end{array}\right\}$

(Sol: SCD x=2, y=1; SCI; SI)

**e)** Dado el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{r}ax+2y=1\\ x+2y=1\end{array}\right\}$

hallar el valor que debe tener el parámetro **a** para que el sistema tenga: **i)** una única solución; **ii)** $\infty$ soluciones; **iii)** Ninguna solución.

**11.** Resolver los siguientes **sistemas de ecuaciones NO lineales** por el método más apropiado en cada caso, y **hacer siempre la comprobación**:

**1.** $\left.\begin{array}{r}x-y=3\\ x^2+y^2=45\end{array}\right\}$ (Sol: $x_1$=6, $y_1$=3; $x_2$=-3, $y_2$=-6)

**2.** $\left.\begin{array}{r} x+y=1 \\ x^2-2x+3y=-1 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=4$, $y_1=-3$; $x_2=1$, $y_2=0$)

**3.** $\left.\begin{array}{r} x+y=7 \\ x^2+y^2=25 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=3$, $y_1=4$; $x_2=4$, $y_2=3$)

**4.** $\left.\begin{array}{r} 2x-y=1 \\ x^2+3xy=0 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=0$, $y_1=-1$; $x_2=3/7$, $y_2=-1/7$)

**5.** $\left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ x^2+y^2=40 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=-2$, $y_1=6$; $x_2=6$, $y_2=-2$)

**6.** $\left.\begin{array}{r} x^2-3y=3 \\ 2x-3y=-12 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=-3$, $y_1=2$; $x_2=5$, $y_2=22/3$)

**7.** $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=25 \\ xy=12 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=3$, $y_1=4$; $x_2=-3$, $y_2=-4$; $x_3=4$, $y_3=3$; $x_4=-4$, $y_4=-3$)

**8.** $\left.\begin{array}{r} 3x+y^2=7 \\ 2x+y^2=6 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=1$, $y_1=-2$; $x_2=1$, $y_2=2$)

**9.** $\left.\begin{array}{r} x+y^2=6 \\ x=-y \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=-3$, $y_1=3$; $x_2=2$, $y_2=-2$)

**10.** $\left.\begin{array}{r} x^2+y^2=61 \\ xy=30 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=-6$, $y_1=-5$; $x_2=5$, $y_2=6$; $x_3=-5$, $y_3=-6$; $x_4=6$, $y_4=5$)

**11.** $\left.\begin{array}{r} y^2=15-x \\ 3(x+1)=y^2 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=3$, $y_1=2\sqrt{3}$; $x_2=3$, $y_2=-2\sqrt{3}$)

**12.** $\left.\begin{array}{r} x^2-2xy+y^2=16 \\ x+y=6 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=5$, $y_1=1$; $x_2=1$, $y_2=5$)

**13.** $\left.\begin{array}{r} x-y=105 \\ \sqrt{x}+y=27 \end{array}\right\}$ (Sol: $x=121$, $y=165$)

**14.** $\left.\begin{array}{r} x-2y=5 \\ x^2+y^2-4x-2y=20 \end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=7$, $y_1=1$; $x_2=-1$, $y_2=-3$)

## Problemas de planteamiento:

**RECORDAR:** A la hora de resolver un problema que requiera el planteamiento de una ecuación o un sistema se recomienda:

- **Leer** atentamente **el enunciado** en su totalidad.
- **Detectar qué nos piden** y llamarlo **x** (e **y**, si se trata de un sistema).
- **Plantear la ecuación** (o el sistema) que relaciona algebraicamente los datos del enunciado y la(s) incógnita(s); para ello, suele ser recomendable hacer una tabla –en los problemas de edades–, o un dibujo –en los de tipo geométrico–, o un diagrama –problemas de mezclas–, etc.
- **Resolverla**.
- Interpretar los resultados obtenidos y **comprobar** que verifican las condiciones del enunciado.

**12.** Tres amigos se pesan en una báscula de dos en dos. Antonio y Benito suman 110 kg, Antonio y Carlos 120 kg, mientras que Benito y Carlos pesan 130 kg ¿Cuánto pesa cada uno? (Sol: Antonio 50 kg, Benito 80 kg y Carlos 70 kg)

**13.** Los 90 alumnos de 1º de Bachillerato de un colegio están divididos en tres grupos, A, B y C. Calcular el número de alumnos de cada grupo sabiendo que, si se pasan 7 alumnos del B al A ambos grupos quedan nivelados, y si se pasan 4 del C al A entonces en éste habría la mitad de alumnos que en aquél. (Sol: 16 alumnos en el A, 30 en el B y 44 en el C)

**14.** Disponemos de fotos para pegar en las hojas de un álbum. Si pegamos 4 fotos en cada hoja nos sobran dos hojas pero si colocamos 3 fotos por hoja entonces nos sobran 10 fotos ¿Cuántas fotos tenemos y cuántas hojas tiene el álbum? (Sol: 64 fotos y 18 hojas)

**15. a)** Calcular el precio original de unos pantalones rebajados un 15 % por los que hemos pagado 68 € (Sol: 68 €)

**b)** Por una multa de tráfico que lleva una penalización del 20 % por demora pagamos finalmente 144 € ¿Cuál era el precio original de la multa? (Sol: 120 €)

**c)** Un comerciante vende los artículos de su tienda aumentando un 40 € el precio de coste como margen de beneficio. A sus allegados quiere vendérselos al precio de coste y, para ello, da a sus dependientes la orden de que les rebajen un 40 % del precio de venta al público. Razonar que este comerciante no sabe muchas Matemáticas y acabará perdiendo dinero.

**16.** Un tren transporta 500 viajeros y la recaudación del importe de sus billetes asciende a 3525 €. Calcular cuántos viajeros han pagado el importe total del billete, que vale 15 €, cuántos han pagado el 20 % del billete y cuántos el 50 %, sabiendo que el número de viajeros que han pagado el 20 % es el doble de los que pagan el billete entero. (Sol: 1500 viajeros a 15 €, 300 a 3 € y 50 a 7,5 €)

**17.** La suma de las edades de un padre y de su hijo es de 35 años. Dentro de 20 años la edad del padre será dos veces la del hijo ¿Qué edad tienen ahora el padre y el hijo?

**18.** Un comerciante piensa vender por 1050 € una partida de piezas de porcelana. Se le rompen 5 y, para compensar la pérdida, debe vender 1 € más caro cada una de las restantes ¿Cuántas piezas de porcelana tenía al principio, y cuánto costaban? (Sol: 75 piezas a 14 €)

**19. a)** Después de subir un 20 %, un artículo vale 45,60 € ¿Cuánto valía antes de la subida? (Sol: 38 €)

**b)** Después de rebajarse en un 35 %, un artículo vale 81,90 € ¿Cuánto valía antes de la rebaja? (Sol: 126 €)

**c)** Una entrada de un cine costaba el año pasado 5,50 € y este año 6,25 € ¿Cuál ha sido el porcentaje de subida? (Sol: 13,64 %)

**20.** Una familia decide dar un donativo de 1125 €. Los padres aportan conjuntamente una determinada cantidad y entre los tres hijos entregan la cuarta parte de lo que dan sus padres ¿Cuánto ha donado cada hijo si cada uno de ellos aporta lo mismo? (Sol: 75 €)

**21.** Calcular las edades de un padre y de sus dos hijos sabiendo que entre los tres suman 99 años, que la edad del padre y la del hijo mayor difieren en 25 años, y que la suma de las edades de ambos hijos se diferencian en la edad del padre en 5 años.

**22.** Tres amigos deciden alquilar un piso juntos y acuerdan que cada uno pague en proporción a sus ingresos. El piso cuesta 1050 € mensuales. Javier gana 4000 €, Fernando 2000 y Pablo 1000 ¿Cuánto deberá aportar cada uno? (Sol: Javier 600 €, Fernando 300 € y Pablo 150 €)

**23. a)** La cantidad de agua de un embalse ha disminuido en un 35 % respecto a lo que había el año pasado. Ahora contiene 74,25 millones de litros ¿Cuántos litros tenía el año pasado? (Sol: 114,23 millones de l)

**b)** En una evaluación de Matemáticas ha aprobado el 60 % de la clase. El resto se presenta a la recuperación, aprobando el 30 % de ellos. Al final del proceso son en total 18 los aprobados ¿Cuál es el porcentaje de aprobados? ¿Cuántos estudiantes forman la clase? (Sol: 72 %; 25 estudiantes)

**c)** Unos pantalones que cuestan 50 € sufren un descuento de 10 € en las rebajas de junio. Posteriormente, en septiembre, vuelven a ser rebajados, esta vez un 40 %. Calcular su precio final. (Sol: 24 €)

**24.** En una competición de baloncesto a doble vuelta participan 12 equipos. Cada partido ganado vale 2 puntos y los partidos perdidos 1 punto (no puede haber empates). Al final de la competición el equipo de Luis tiene 36 puntos ¿Cuántos partidos ha ganado? (Ayuda: Razona, en primer lugar, cuántos partidos jugará cada equipo) (Sol: Cada equipo jugará 22 partidos; el equipo de Luis ha ganado 14 partidos y ha perdido 8)

**25.** Un orfebre quiere conocer las dimensiones de un grabado con forma rectangular. Calcular sus dimensiones sabiendo que uno de sus lados mide 3 cm más que el otro, y que su área ha de ser 70 cm$^2$ (Sol: 10 cm x 7 cm)

**26.** El cajero del banco nos entrega un total de 18 billetes cuando vamos a cobrar un cheque de 600 €, utilizando para ello billetes de 20 y de 50 exclusivamente ¿Cuántos de cada tipo? (Sol: 8 de 50 € y 10 de 20)

**27.** En una comunidad de vecinos ha de hacerse una obra urgente. En promedio cada vecino debería pagar 256 €, pero tres vecinos morosos se niegan a colaborar. Los demás calculan que entonces deberán pagar 320 € ¿Cuántos vecinos son en total en la comunidad? ¿A cuánto asciende la obra? (Sol: 15 vecinos; 3840 €)

**28.** Una finca rectangular la hemos cercado con 30 rollos de alambrada de 10 m cada uno. Si la finca es 20 m más larga que ancha, calcular sus dimensiones. (Sol: 85 m x 65 m)

**29.** En una clase de 35 estudiantes han aprobado las Matemáticas el 80 % de las chicas y el 60 % de los chicos ¿Cuántas alumnas tiene la clase si el número de chicas que han aprobado es el mismo que el de chicos? ¿Cuántos chicos hay? (Sol: 20 chicos y 15 chicas)

**30.** Dos hermanos, mientras charlan, concluyen que entre ambos tienen 29 años, y el uno le dice al otro: "Dentro de 8 años mi edad será el doble de la tuya". ¿Cuántos años tiene cada uno en la actualidad? (Sol: 7 y 22 años)

**31.** Una familia adquiere una determinada cantidad de litros de aceite por un importe de 144 €. Al cabo de un año los precios han disminuido en 1 €/litro, por lo que, con el mismo dinero, puede comprar 12 l más de aceite ¿Qué cantidad había adquirido inicialmente y a qué precio? (Sol: 36 l a 4 €/l)

**32.** En 1º de Bachillerato hay el doble de alumnos que en el B. Si 9 alumnos del B pasaran al A habría en éste grupo el quíntuplo de alumnos de los que quedan en B. Hallar el número de alumnos que hay en cada grupo.

**33.** Se quiere distribuir un lote de libros entre varios alumnos. Si a cada alumno se le asignan tres libros sobran 17 y para asignarle 4 faltan 8 libros. Hallar el número de alumnos y de libros.

**34.** Dos tinajas tienen la misma cantidad de vino. Si se pasan 37 litros de una a otra, ésta contiene ahora el triple que la primera ¿Cuántos litros de vino había en cada tinaja al principio? (Sol: 74 l)

**35.** Un padre, preocupado por motivar a su hijo en Matemáticas, se compromete a darle 1 € por problema bien hecho, mientras que, si está mal, el hijo le devolverá 0,5 €. Después de realizar 60 problemas, el hijo ganó 30 €. ¿Cuántos problemas resolvió correctamente? (Ayuda: Plantear un SS.EE. de 1er grado) (Sol: 40 problemas)

**36.** Tres hermanos se reparten un premio de 350 €. Si el mayor recibe la mitad de lo que recibe el mediano; y el mediano la mitad de lo que recibe el pequeño, ¿cuánto dinero tendrá cada hermano al final? (Sol: 50 € el mayor, 100 € el mediano y 200 € el pequeño)

**37.** Un salón de forma rectangular tiene una superficie de 48 $m^2$ y su diagonal mide 10 m ¿Cuáles son sus dimensiones? (Sol: 6 m x 8 m)

**38.** Hallar dos números positivos sabiendo que su cociente es 2/3 y su producto 216 (Sol: 12 y 18)

**39.** Si los lados de un cuadrado aumentan 2 cm, su área aumenta 28 $cm^2$ ¿Cuáles son las dimensiones del cuadrado originario? (Sol: Se trata de un cuadrado de lado 6 cm)

**40.** Un grupo de estudiantes alquila un piso por el que tienen que pagar 420 € al mes. Uno de ellos hace cuentas y observa que si fueran dos estudiantes más, cada uno tendría que pagar 24 € menos. ¿Cuántos estudiantes han alquilado el piso? ¿Cuánto paga cada uno? (Sol: 5 estudiantes a 84 € cada uno)

**41.** Un almacenista de fruta compra un determinado número de cajas de fruta por un total de 100 €. Si hubiera comprado 10 cajas más y cada caja le hubiera salido por 1 € menos, entonces habría pagado 120 €. ¿Cuántas cajas compró y cuánto costó cada caja? (Sol: 20 cajas a 5 €)

**42.** Un rectángulo tiene 300 $cm^2$ de área y su diagonal mide 25 cm. ¿Cuánto miden sus lados? (Sol: 20 x 15 cm)

**43.** Un frutero ha comprado manzanas por valor de 336 €. Si el kilo de manzanas costara 0,80 € menos, podría comprar 48 kg más. Calcular el precio de las manzanas y la cantidad que compró. (Sol: 120 kg a 2,80 €/kg)

**44.** Una persona compra una parcela de terreno por 4800 €. Si el $m^2$ hubiera costado 2 € menos, por el mismo dinero habría podido comprar una parcela 200 $m^2$ mayor. ¿Cuál es la superficie de la parcela que ha comprado? ¿Cuánto cuesta el $m^2$? (Sol: 600 $m^2$; 8 €)

**45.** El área de un **triángulo** rectángulo es 30 $m^2$ y la hipotenusa mide 13 m. ¿Cuáles son las longitudes de los catetos? (Sol: 12 m y 5 m)

**46.** Calcular dos números naturales impares consecutivos cuyo producto sea 195 (Sol: 13 y 15)

**47.** Si multiplicamos la tercera parte de cierto número por sus tres quintas partes, obtenemos 405. ¿Cuál es ese número? (Sol: 45)

**48.** Varios amigos alquilan un local por 800 €. Si hubieran sido tres más, habría pagado cada uno 60 € menos. ¿Cuántos amigos son? (Sol: 5 amigos)

**49.** Uno de los lados de un rectángulo es doble que el otro y el área mide 50 $m^2$. Calcular las dimensiones del rectángulo. (Sol: 5 x 10 m)

**50.** Un campo rectangular de 4 ha de superficie tiene un perímetro de 10 hm. Calcular, en metros, su longitud y su anchura. (Recordar: 1 ha=100 a; 1 a=100 $m^2$) (Sol: 100 m x 400 m)

**51.** Las diagonales de un rombo están en la relación de 2 a 3. El área es de 108 $cm^2$. Calcular la longitud de las diagonales y el lado del rombo. (Sol: d=12 cm; D=18 cm; l $\cong$ 10,81 cm)

**52.** El diámetro de la base de un cilindro es igual a su altura. El área total es 169,56 $m^2$. Calcular sus dimensiones. (Sol: d=h=6 m)

## Problemas de mezclas:

**53.** Con dos tipos de café, de 8,5 €/kg y 13 €/kg, queremos obtener una mezcla de 11 €/kg ¿Qué cantidad habrá que mezclar de cada tipo para obtener 20 kg de mezcla? (Sol: $\cong$ 8,9 kg del café de 8,5 € y 11,1 kg del otro)

**54.** Si se mezclan dos tipos de abono, uno de 1,64 €/kg y otro de 1,48 €/kg, se obtiene otro tipo de una calidad intermedia que sale a 1,52 €/kg ¿Cuántos g de cada tipo contiene el kg de mezcla? (Sol: 250 g del de 1,64 y 750 g del otro)

**55.** Disponemos de un vino de 10º y de otro de 15º y queremos mezclarlos para obtener un vino de 12º ¿Qué volumen de cada tipo contendrá el litro de mezcla? (Sol: 3/5 de litro y 2/5 de litro, respectivamente)

**56. a)** Disponemos de dos tipos de gasóleo: uno de 70 cent/l y otro de 90 cent/l, y queremos mezclarlos en un depósito de 1000 l de capacidad para obtener un gasóleo de 75 cent/l ¿Cuántos litros tendremos que añadir de cada tipo? (Sol: 750 l del primer gasóleo y 250 l del otro)

**b)** Si decidiéramos hacer una nueva mezcla en el mismo depósito utilizando 400 l del gasóleo de 70 cent, cuánto costaría el litro de gasóleo obtenido? (Sol: 82 cent/l)

**57.** Se desea mezclar harina de 55 cent/kg con otra de 40 cent/kg, de modo que el kg de la mezcla resulte a 45 cent ¿Cuántos kg de cada clase deben mezclarse para obtener 300 kg de la mezcla?

**58.** Se desea mezclar cacao de 1 €/kg con cacao de 1,80 €/kg de modo que la mezcla resulte a 1,40 €/kg ¿Cuántos kg de cada clase debemos mezclar para obtener un total de 40 kg de cacao?

**59.** Con dos tipos de barniz, de 3,50 €/kg y de 1,50 €/kg, queremos obtener un barniz de 2,22 €/kg. ¿Cuántos kilogramos tenemos que poner de cada clase para obtener 50 kg de la mezcla? (Ayuda: plantear un sistema de ecuaciones de primer grado) (Sol: 18 kg del barniz de 3,50 y 32 kg del de 1,50)

## Repartos inversamente proporcionales:

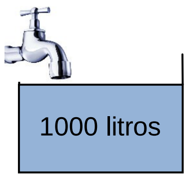
**60.** De los tres grifos que afluyen a un estanque de 1000 l uno puede llenarlo funcionando él solo en 36 horas, otro en 30 horas y el tercero en 20 horas. **a)** ¿Cuánto tiempo tardarán en llenarlo juntos? **b)** ¿Es necesario el dato de los 1000 l? ¿Qué conclusión sacas en general para los repartos inversamente proporcionales?

Solución:

En primer lugar, veamos la contribución de cada grifo funcionando separadamente:

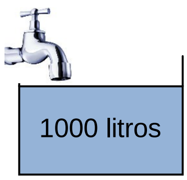
20 horas

$$\left.\begin{array}{l} 1000 \text{ litros} \rightarrow 20 \text{ horas} \\ x \text{ litros} \rightarrow t \text{ horas} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1000\,t}{20}$$



30 horas

$$\left.\begin{array}{l} 1000 \text{ litros} \rightarrow 30 \text{ horas} \\ x \text{ litros} \rightarrow t \text{ horas} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1000\,t}{30}$$



36 horas

$$\left.\begin{array}{l} 1000 \text{ litros} \rightarrow 36 \text{ horas} \\ x \text{ litros} \rightarrow t \text{ horas} \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{1000\,t}{36}$$

Por lo tanto, el 1$^{er}$ grifo proporciona $\frac{1000\,t}{20}$ litros en t horas, el 2º en $\frac{1000\,t}{30}$, y el 3º en $\frac{1000\,t}{36}$. Por consiguiente, podemos sumar las tres contribuciones e igualarlas a 1000 litros:

$$\frac{\cancel{1000}t}{20}+\frac{\cancel{1000}t}{30}+\frac{\cancel{1000}t}{36}=\cancel{1000}$$

Vemos que el dato de la capacidad total del depósito es irrelevante, y esto va a ocurrir siempre en los problemas de repartos inversamente proporcionales. Obtenemos así la **Fórmula general de los repartos inversamente proporcionales:**

$$\boxed{\frac{t}{20}+\frac{t}{30}+\frac{t}{36}=1}$$

Es trivial despejar t, obteniéndose como solución: $\boxed{\text{9 horas}}$.

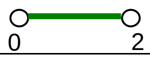
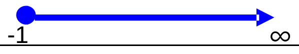
**61.** Un pintor tarda tres horas en pintar una pared mientras que otro sólo tardaría dos horas ¿Cuánto tardarán en pintarla los dos a la vez. (Sol: 1 h 12 min)

**62.** Una cuadrilla vendimia una parcela de 1 ha en 1 hora mientras que otra más lenta lo haría en 2 horas. **a)** ¿Cuánto tardarían en vendimiar esa parcela trabajando ambos a la vez? **b)** ¿Cuánto tardarán en vendimiar a la vez un campo de 5 ha? (Sol: 40 min; 3 h 20 min)

**63.** Un albañil levanta una pared en 2 horas, otro en 3 horas y un tercero en 4 horas ¿Cuánto tardarán en levantarla juntos? (Sol: 55 min)

## Repaso de intervalos:

**64.** Completar:

| | REPRES. GRÁFICA | INTERVALO | DEF. MATEMÁTICA |
|---|---|---|---|
| 1 | | [-1,3] | |
| 2 |  | | |
| 3 |  | | |
| 4 | | [-2,1) | |
| 5 | | | {x∈IR/ 1<x≤5} |
| 6 |  | | |
| 7 | | | {x∈IR/ x<2} |
| 8 | | (0,∞) | |
| 9 |  | | |

| | REPRES. GRÁFICA | INTERVALO | DEF. MATEMÁTICA |
|---|---|---|---|
| 10 | | (-1,5) | |
| 11 | | | {x∈R/ x≤0} |
| 12 | | [2/3,∞) | |
| 13 | | | {x∈IR/ -2<x≤2} |
| 14 | | | {x∈IR/ \|x\|<3} |
| 15 | | | {x∈IR/ \|x\|≥3} |
| 16 |   | | |
| 17 | | [-1,1] | |
| 18 | | | {x∈IR/ x<-1} |
| 19 |   | | |
| 20 | | (-∞,-2)U(2,∞) | |
| 21 | | (-∞,2)U(2,∞) | |
| 22 | | | {x∈IR/ \|x\|≤5} |
| 23 | | [-2,2] | |
| 24 |   | | |

**65.** Representar en la recta real los siguientes intervalos y definirlos empleando desigualdades:

**a)** [2,4]
**b)** (1,6)
**c)** [1,5)
**d)** (−1, 3)
**e)** (−2,2)
**f)** (0,∞)
**g)** (−∞,3]
**h)** [−3,3]
**i)** (5/3,∞)
**j)** (−∞,−2]

**66.** Representar en la recta real los siguientes conjuntos numéricos y nombrarlos –siempre que se pueda– empleando intervalos:

**a)** {x∈IR/ -2<x≤3}
**b)** {x∈IR/ 1≤x≤4}
**c)** {x∈IR/ x≥2}
**d)** {x∈IR/ x<0}
**e)** {x∈IR/ |x|≤3}
**f)** {x∈IR/ |x|>4}
**g)** {x∈IR/ x>-3}
**h)** {x∈IR/ x≤5}
**i)** {x∈IR/ |x|<5}
**j)** {x∈IR/ |x|≥2}
**k)** {x∈IR/ |x|=2}

## Expresiones con valor absoluto:

RECORDAR: Hay 3 casos posibles (k>0 siempre):

$$|\text{expresión}|=k \quad \begin{cases} \nearrow \ \text{expresión}=k \\ \searrow \ \text{expresión}=-k \end{cases}$$

$$|\text{expresión}|<k \Rightarrow -k<\text{expresión}<k$$

$$|\text{expresión}|>k \Rightarrow \text{expresión}<-k \ \text{ ó } \ \text{expresión}>k$$

**67.** Indicar para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones; en el caso de las desigualdades, indicar la solución mediante intervalos:

**a)** $|x|=5$

**b)** $|x|\le 5$

**c)** $|x|>5$

**d)** $|x-4|=2$ (Sol: $x_1=2$, $x_2=6$)

**e)** $|x-4|\le 2$ (Sol: $x\in[2,6]$)

**f)** $|x-4|>2$ (Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(6,\infty)$)

**g)** $|x+4|>5$ (Sol: $x\in(-\infty,-9)\cup(1,\infty)$)

**h)** $|x|=-2$

**i)** $|x|=0$

**j)** $|x|<2$

**k)** $|x|\ge 2$

**l)** $|x+1|=3$ (Sol: $x_1=-4$, $x_2=2$)

**m)** $|x-2|\le 3$ (Sol: $x\in[-1,5]$)

**n)** $|x|=7$

**o)** $|x|\le 6$

**p)** $|x|>2$

**q)** $|x-2|<5$ (Sol: $x\in(-3,7)$)

**r)** $|x+3|\ge 7$ (Sol: $x\in(-\infty,-10]\cup[4,\infty)$)

**s)** $|2x|<8$ (Sol: $x\in(-4,4)$)

**t)** $|x|>-3$ (Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$)

**u)** $|x|=x$

**v)** $|x|=-3$ (Sol: $\nexists$soluc.)

## Repaso de inecuaciones:

### Inecuaciones de 1$^{er}$ grado con una incógnita:

**68.** Dada la inecuación $2x>5$, estudiar si los siguientes números pueden ser solución: $x=-1$, $x=0$, $x=1$, $x=2$, $x=3$, $x=4$, $x=5/2$. Indicar, a continuación, su solución general.

**69.** Dada la inecuación $3x+1>x+5$ se pide, por este orden:

**a)** Comprobar si son posibles las soluciones $x=5$, $x=0$, $x=-1$

**b)** Resolverla y dibujar en la recta real la solución.

RECORDAR: Las inecuaciones de 1$^{er}$ grado se resuelven de forma prácticamente similar a las ecuaciones de 1$^{er}$ grado; por ejemplo, si un número **positivo** está multiplicando a todo un miembro, pasará al otro miembro dividiendo:

| ECUACIÓN: | INECUACIÓN: |
|---|---|
| $2x=6$ | $2x\ge 6$ |
| $x=3$ | $x\ge 3$ |

Solamente hay una diferencia con las ecuaciones: si el factor multiplicativo fuera negativo, habría que cambiar el sentido de la desigualdad. El motivo es el siguiente:

p. ej. $2<6 \xrightarrow{\text{multiplicamos ambos miembros por } -1} -2>-6$

En la práctica se recomienda multiplicar ambos miembros de la desigualdad por −1, lo cual cambia el sentido de la desigualdad. Por ejemplo:

$$-2x \geq 6$$
$$2x \leq -6$$
$$x \leq -3$$

**70.** Resolver las siguientes inecuaciones simples, expresando la solución mediante desigualdades:

**a)** $7x\leq 14$
**b)** $-2x>6$
**c)** $3x\leq -9$
**d)** $-5x\geq -15$
**e)** $10\leq 5x$
**f)** $-14\geq 7x$
**g)** $-x>2$
**h)** $20\leq -20x$ (Sol: $x\leq -1$)
**i)** $-11<-11x$ (Sol: $x<1$)
**j)** $-5x\geq 5$ (Sol: $x\leq -1$)
**k)** $3\leq -x$
**l)** $3x<-3$ (Sol: $x<-1$)
**m)** $-2<-2x$ (Sol: $x<1$)
**n)** $-7x\leq -7$ (Sol: $x\geq 1$)
**o)** $\frac{2x}{3}>1$

**71.** Resolver las siguientes inecuaciones, y expresar la solución mediante intervalos y representada en la recta real:

**1)** $2x+6\leq 14$ (Sol: $x\leq 4$)
**2)** $3x-4\geq 8$ (Sol: $x\geq 4$)
**3)** $4x+7\leq 35$ (Sol: $x\leq 7$)
**4)** $3x+5<x+13$ (Sol: $x<4$)
**5)** $5-3x\geq -3$ (Sol: $x\leq 8/3$)
**6)** $4-2x\geq x-5$ (Sol: $x\leq 3$)
**7)** $5+3x<4-x$ (Sol: $x<-1/4$)
**8)** $2x-3>4-2x$ (Sol: $x>7/4$)
**9)** $6x-3<4x+7$ (Sol: $x<5$)
**10)** $3x-1<-2x+4$ (Sol: $x<1$)
**11)** $2x+9>3x+5$ (Sol: $x<4$)
**12)** $2(x-3)+5(x-1)\geq -4$ (Sol: $x\geq 1$)
**13)** $12(x+2)+5<3(4x+1)+3$ (Sol: $\nexists$ soluc.)
**14)** $5(x-2)-4(2x+1)<-3x+3$ (Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$)
**15)** $x(x-1)>x^2+3x+1$ (Sol: $x<-1/4$)
**16)** $(x+2)(x+3)<(x-1)(x+5)$ (Sol: $x<-11$)
**17)** $2(x+3)+3(x-1)>2(x+2)$ (Sol: $x>1/3$)
**18)** $\frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{3}<1$ (Sol: $x<1$)
**19)** $\frac{x}{3}+\frac{x}{2}>5-\frac{x}{6}$ (Sol: $x>5$)
**20)** $\frac{2x-4}{3}+\frac{3x+1}{3}<\frac{2x-5}{12}$ (Sol: $x<7/18$)
**21)** $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}>x-2$ (Sol: $x<6$)
**22)** $\frac{5x-2}{3}-\frac{x-8}{4}>\frac{x+14}{2}-2$ (Sol: $x>4$)
**23)** $\frac{x+4}{3}-\frac{x-4}{5}>2+\frac{3x-1}{15}$ (Sol: $x<3$)
**24)** $\frac{3x-3}{5}-\frac{4x+8}{2}<\frac{x}{4}-3x$ (Sol: $x<92/27$)
**25)** $\frac{x-1}{2}-x<\frac{1-x}{4}-3$ (Sol: $x>9$)
**26)** $\frac{x}{3}-\frac{2x+1}{8}-\frac{8-10x}{45}>0$ (Sol: $x>109/110$)
**27)** $\frac{x}{2}+\frac{x+1}{7}-x+2<0$ (Sol: $x>6$)
**28)** $4x-\frac{3-2x}{4}<\frac{3x-1}{3}+\frac{37}{12}$ (Sol: $x<1$)
**29)** $\frac{2x+3}{4}>\frac{x+1}{2}+3$ (Sol: $\nexists$ soluc.)
**30)** $\frac{x-2}{3}-\frac{12-x}{2}>\frac{5x-36}{4}-1$ (Sol: $x<8$)
**31)** $\frac{x}{18}-\frac{2x+1}{12}\geq\frac{2-4x}{24}$ (Sol: $x\geq 3$)
**32)** $1-\frac{3x-7}{5}>\frac{5x+4}{15}-\frac{x-1}{3}$ (Sol: $x<3$)

**72.** Un empresario paga a un vendedor un sueldo fijo de 1500 € más 1 € por artículo vendido. Otro vendedor, más emprendedor, no tiene sueldo fijo, pero pacta cobrar 3 € por cada unidad que logre vender ¿A partir de qué número de productos vendidos cobrará más el segundo empleado?

**73.** Un alumno ha obtenido un 3,75 en el primer examen de la evaluación, y un 4,5 en el segundo. Hallar qué nota deberá sacar como mínimo en el tercer y último examen, que hace media con los anteriores, para poder aprobar. (NOTA: se considera aprobado si la media es al menos un 5)

**74.** Una editorial ofrece a un vendedor dos tipos de contrato: A) 25000 € fijos más un 10 % por cada libro vendido; o bien: B) El 30 % del precio de cada libro vendido. Si el precio de cada ejemplar es de 35 €, ¿a partir de cuántos ejemplares vendidos le resultará más beneficiosa la opción B? (Sol: Deberá vender 3571 libros)

**75.** Se define el Índice de masa corporal (IMC) como el siguiente cociente:

$$\text{IMC} = \frac{\text{peso (enkg)}}{\text{estatura}^2 \text{ (en m)}}$$

Un peso normal se considera entre 18,5 y 24,9. Si el IMC de un individuo supera este último valor, se le considera obeso. Hallar cuál es el peso máximo para un individuo de 1,89 m de altura de modo que se pueda considerar un peso normal.

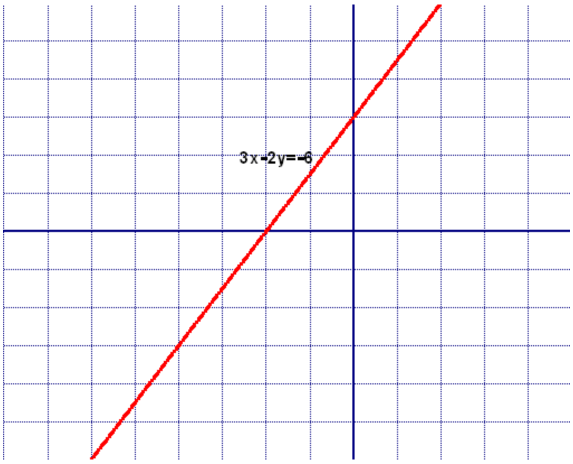
## Inecuaciones de 1^er grado con dos incógnitas:

Ejemplo: Resolver $3x-2y\geq-6$

Solución: **1º)** Dibujamos la recta $3x-2y=-6$. Para ello, lo habitual y más sencillo es dar los valores x=0 e y=0:

| **x** | 0 | -2 |
|---|---|---|
| **y** | 3 | 0 |

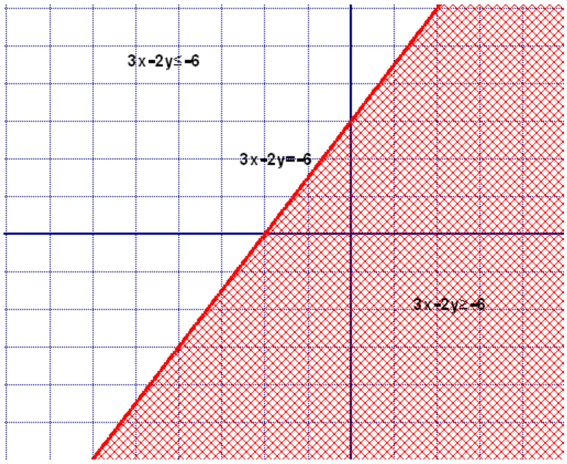
$\Rightarrow$




**2º)** Vemos que la recta anterior divide al plano en dos semiplanos en los que lógicamente la expresión $3x-2y\geq-6$ va a ser, respectivamente, V o F. Para ver cuál de los dos es la región solución (es decir, aquella cuyos $\infty$ puntos verifican $3x-2y\geq-6$ ) damos un valor arbitrario; el más fácil es el (0,0):

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0\geq-6$$

obteniendo una desigualdad V. Por lo tanto, el (0,0) se encuentra en la región solución. Y, por lo tanto, **la región solución es el semiplano inferior** (de hecho, puede comprobarse que cualquier otro punto de ese semiplano también conduce a una desigualdad V), **que señalaremos sombreándolo**:




NOTA: Lógicamente, el otro semiplano, el no sombreado, sería la solución de $3x-2y\le -6$.

NOTA: Nótese que los $\infty$ puntos de la recta también forman parte de la solución, pues conducen a la desigualdad $6\ge -6$, que es V. Y, **para indicar que incluimos la recta en la solución, la dibujamos con trazo continuo**. Si la desigualdad hubiera sido $3x-2y>-6$, la recta iría con trazo discontinuo.

**76.** Determinar la representación gráfica de la solución de cada una de las siguientes **inecuaciones de 1$^{er}$ grado con dos incógnitas**:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $x+2y\ge 3$ | **d)** $3x+2y>7-3y$ | **g)** $y<x+2$ | **j)** $6x+5y\le 30$ |
| **b)** $x+2y<3$ | **e)** $x>0$ | **h)** $x+y\ge 5$ | |
| **c)** $2x-y\le 4-x$ | **f)** $y\le 4$ | **i)** $2x-y<6$ | |

RECORDAR: Resolver un sistema de inecuaciones significa encontrar la región del plano que verifica todas y cada una de las inecuaciones del sistema. Por lo tanto, para resolverlo tendremos que:

**1º)** Encontrar por separado las regiones solución de cada inecuación en particular. Se recomienda dibujar todas ellas sobre los mismos ejes.

**2º)** La región solución del sistema será la $\cap$ de las regiones anteriores. Podemos obtener un recinto poligonal, o un recinto abierto, o es posible que los recintos particulares no tengan ningún punto en común, en cuyo caso el sistema carecería de solución (sistema incompatible).

**77.** Representar gráficamente la solución de cada uno de estos **sistemas de inecuaciones de 1$^{er}$ grado con dos incógnitas**:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **a)** $\left.\begin{matrix} x-3y>-3 \\ 3x+y\le 5 \end{matrix}\right\}$ | **e)** $\left.\begin{matrix} 3x+2y\le 6 \\ -6x-4y\le -12 \end{matrix}\right\}$ | **i)** $\left.\begin{matrix} 2x-y\le 6 \\ 2x-y>10 \end{matrix}\right\}$ | **l)** $\left.\begin{matrix} y<3x \\ y>-x \end{matrix}\right\}$ |
| **b)** $\left.\begin{matrix} 2x-y\ge 6 \\ 3x+5y<10 \end{matrix}\right\}$ | **f)** $\left.\begin{matrix} x+y\le 5 \\ -2x+3y\ge 6 \end{matrix}\right\}$ | **j)** $\left.\begin{matrix} 2x-y>6 \\ 2x-y<10 \end{matrix}\right\}$ | **m)** $\left.\begin{matrix} y>-x+2 \\ y\le \frac{x}{2}+\frac{5}{2} \end{matrix}\right\}$ |
| **c)** $\left.\begin{matrix} y<2-x \\ y\ge x+2 \end{matrix}\right\}$ | **g)** $\left.\begin{matrix} x+y\le 5 \\ 2x+2y<10 \end{matrix}\right\}$ | **k)** $\left.\begin{matrix} x-y>-5 \\ x+y>-3 \\ x+y\le 10 \end{matrix}\right\}$ | |
| **d)** $\left.\begin{matrix} 2x-y>6 \\ 3x+5y<10 \end{matrix}\right\}$ | **h)** $\left.\begin{matrix} x\le 6 \\ y>4 \end{matrix}\right\}$ | | |

## Repaso número real:

**78.** Separar los siguientes números en racionales o irracionales, indicando, de la forma más sencilla posible, el porqué:

$$\frac{1}{8} \qquad \frac{\pi}{3} \qquad \sqrt{5} \qquad 2,6 \qquad 0 \qquad -3 \qquad -\frac{25}{3} \qquad \sqrt[3]{13} \qquad 0,1 \qquad 6,\widehat{4} \qquad 534 \qquad 1,414213562...$$

(Sol: ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; )

**79.** Indicar cuál es el menor conjunto numérico al que pertenecen los siguientes números ( , , o ); en caso de ser o **,** razonar el porqué:

$$\frac{\pi}{2} \qquad \sqrt{3} \qquad \sqrt{4} \qquad 0,0015 \qquad -10 \qquad \frac{5}{6} \qquad 2,\widehat{3} \qquad 2,02002000\,2...$$

(Sol: ; ; ; ; ; ; ; )

**80.** Señalar cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales, indicando el porqué:

**a)** 3,629629629....

**b)** 0,130129128...

**c)** 5,216968888...

**d)** 0,123456789...

**e)** 7,129292929...

**f)** 4,101001000...

(Sol: ; ; ; ; ; )

**81. TEORÍA:** ¿Verdadero o falso? Razonar la respuesta:

**a)** Todo número real es racional.

**b)** Todo número natural es entero.

**c)** Todo número entero es racional.

**d)** Siempre que multiplicamos dos números racionales obtenemos otro racional.

**e)** Siempre que multiplicamos dos números irracionales obtenemos otro irracional.

**f)** Entre dos números reales existe siempre un racional.

**g)** " " " " " " irracional

**82.** Separar los siguientes números en racionales e irracionales, indicando el porqué:

$$\frac{1}{2} \qquad \pi \qquad \sqrt{13} \qquad \frac{2,6}{2} \qquad \sqrt{169} \qquad 0,\widehat{7} \qquad \frac{3}{5} \qquad 0,494949.. \qquad \sqrt{7} \qquad 3,75 \qquad -13 \qquad 6,2\widehat{4} \qquad 1,732050..$$

(Sol: ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; ; )

**83. a)** Representar sobre la misma recta real los siguientes racionales:

$$\frac{3}{2} \qquad -3 \qquad 0,\widehat{6} \qquad \frac{5}{6} \qquad -\frac{3}{4} \qquad \frac{11}{5} \qquad 2,25 \qquad \frac{19}{6} \qquad 3,\widehat{9}$$

**b)** Construir $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}$ y $\sqrt{10}$ sobre la recta real (no necesariamente sobre la misma), mediante regla y compás, y la aplicación del teorema de Pitágoras.

## Repaso fracciones, potencias y raíces:

**84.** Operar, simplificando en todo momento:

$$\frac{\frac{5}{4}-\frac{3}{5}:\left[2+\frac{3}{5}\left(\frac{6}{9}:\frac{3}{4}\right)\right]}{\frac{5}{4}:\frac{3}{5}\left(2+\frac{3}{5}:\frac{6}{9}\right)-\frac{3}{4}}=$$

(Sol: 462/2413)

**85.** Completar:

| | | |
|---|---|---|
| $a^m \cdot a^n =$ | $a^0 =$ | $(\text{base negativa})^{par} =$ |
| $\frac{a^m}{a^n} =$ | $a^{-n} =$ | $(\text{basenegativa})^{impar} =$ |
| $(a^m)^n =$ | $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} =$ | |
| $(a \cdot b)^n =$ | $1^n =$ | |
| $\left(\frac{a}{b}\right)^n =$ | $(-1)^{par} =$ | |
| | $(-1)^{impar} =$ | |

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso. Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\left(2^0 \cdot 2^{-1} \cdot 2^3\right)^3}{\left[\frac{(1/3)^{-2}}{3}+1\right]^3}=$$

(Sol: 1)

**86.** Completar:

| | |
|---|---|
| Definición de raíz n-ésima | $\sqrt[n]{a}=x \iff$ |
| Casos particulares de simplificación | $\sqrt[n]{x^n}=$ |
| | $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n =$ |
| Equivalencia con una potencia de exponente fraccionario | $\sqrt[n]{x^m}=$ |
| Simplificación de radicales/Índice común | $\sqrt[n\cdot p]{x^{m\cdot p}}=$ |
| Producto de raíces del mismo índice | $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=$ |
| Cociente de raíces del mismo índice | $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=$ |
| Potencia de una raíz | $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m =$ |
| Raíz de una raíz | $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=$ |
| Introducir/Extraer factores | $x\cdot\sqrt[n]{a}=$ |

Añadir estas fórmulas al formulario matemático de este curso. Utilizando las propiedades anteriores, simplificar la siguiente expresión:

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}\cdot\left(\sqrt{a^3}\right)^3}{\sqrt[3]{a\cdot\sqrt{a^3}}}=$$ (Sol: $\sqrt[3]{a^{13}}$ )

**87.** Operar, simplificando en todo momento:

**a)** $$\frac{2+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2}}}{2}:\frac{1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}}{\dfrac{2}{5}:\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{5}{3}}=$$ (Sol: 24/25)

**b)** $$\frac{\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}+\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{-3}}{\left[(-2)^3\right]^2+(-3)^3\cdot(-3)^2}=$$ (Sol: –4/179)

**c)** $$\frac{\sqrt{2\sqrt[3]{2}\sqrt{4\sqrt{2}}}}{\left(\sqrt[8]{2}\right)^2}=$$ (Sol: $\sqrt[24]{2^{25}}$

**d)** $$\frac{\dfrac{4}{3}:\dfrac{7}{4}+\left(7+\dfrac{2}{5}\right):\dfrac{7}{3}}{\dfrac{4}{3}+\dfrac{7}{4}\left(7-\dfrac{2}{5}\right)\dfrac{7}{3}}=$$ (Sol: 236/1697)

**e)** $$\frac{\dfrac{\left(\dfrac{4}{5}\right)^{-2}\left(\dfrac{5}{2^3}\right)^{-1}}{\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-1}}+(-4)^{-3}}{1+\dfrac{\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-2}}{4^{-3}}}=$$ (Sol: –1/64)

**f)** $$\frac{\left(\sqrt{125}\right)^3}{\sqrt{5\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{25}}}=$$ (Sol: $\sqrt[12]{5^{41}}$ )

**g)** $$\frac{\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-4}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3}\right]^2-\left[\left(\dfrac{2}{3}\right)^2\right]^{-3}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{-5}}{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-1}\left[\left(\dfrac{4}{9}\right)^2\right]^{-1}\left(-\dfrac{3}{2}\right)^2\dfrac{1}{3^4}\,2^{-1}}=$$ (Sol: –608/81)

**88. a)** Extraer factores y simplificar:

$$5\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\sqrt[3]{\frac{4}{81}}=$$ Sol : $\frac{5}{3}\sqrt[3]{2}$

**b)** Sumar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$$5\sqrt{\frac{3}{4}}+\sqrt{27}-4\sqrt{3}-\sqrt{300}=$$ Sol : $-\frac{17}{2}\sqrt{3}$

**c)** Racionalizar y simplificar:

$\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{2}{\sqrt{125}}=$ $\left(\text{Sol}: \frac{8\sqrt{5}}{25}\right)$

$\sqrt[3]{\frac{1}{1296}}=$ $\left(\text{Sol}: \frac{\sqrt[3]{36}}{36}\right)$

$\frac{17-9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}-5}-\frac{9}{\sqrt{3}}=$ (Sol: 2)

**89.** **a)** Simplificar, reduciendo previamente a radicales semejantes:

$\sqrt{128}+5\sqrt{12}-2\sqrt{18}-3\sqrt{27}-\sqrt{2}=$ $\left(\text{Sol}: \sqrt{2}+\sqrt{3}\right)$

**b)** Racionalizar y simplificar:

$\frac{3\sqrt{2}-2}{3\sqrt{2}+2}+\frac{6\sqrt{12}}{7\sqrt{6}}=$ (Sol: 11/7)

$\frac{3\sqrt[5]{9}}{2\sqrt[3]{243}}=$ $\left(\text{Sol}: \frac{\sqrt[15]{3^{11}}}{6}\right)$

**c)** Operar y simplificar:

$\left(\sqrt{7}+\sqrt{3}\right)^2\left(5-\sqrt{21}\right)=$ (Sol: 8)

**d)** Simplificar y operar:

$\sqrt{125}-2\sqrt[4]{400}+\sqrt[6]{8000}=$ $\left(\text{Sol}: 3\sqrt{5}\right)$

**90.** Racionalizar denominadores y simplificar:

**a)** $\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$ $\left(\text{Sol}: \frac{\sqrt{50+10\sqrt{5}}}{10}\right)$

**b)** $\frac{3}{\sqrt{\sqrt[3]{3}}}$ $\left(\text{Sol}: \sqrt[6]{243}\right)$

**c)** $\frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3}+\frac{12}{\sqrt{3}}$ (Sol: 7)

**d)** $\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=$ $\left(\text{Sol}: \frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

**e)** $\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ $\left(\text{Sol}: \frac{1+\sqrt{6}-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}\right)$

## Repaso de fracciones algebraicas:

**91.** Operar y simplificar:

**a)** $\frac{x^4-5x^2-36}{x^2-9}$ (Sol: $x^2+4$)

**b)** $\dfrac{x+1}{x-2}+\dfrac{x-2}{x+2}-\dfrac{12}{x^2-4}$ $\left(\text{Sol}: \dfrac{2x+3}{x+2}\right)$

**c)** $\dfrac{\dfrac{x^3-x}{2x^2+6x}}{\dfrac{5x^2-5x}{2x+6}}=$ $\left(\text{Sol}: \dfrac{x+1}{5x}\right)$

**d)** $\dfrac{1}{x^2-9x+20}-\dfrac{1}{x^2-11x+30}+\dfrac{1}{x^2-10x+24}$ $\left(\text{Sol}: \dfrac{x-7}{x^3-15x^2+74x-120}\right)$

**e)** $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}+\dfrac{x+2}{x-2}\dfrac{x-1}{x+1}=$ $\left(\text{Sol}: \dfrac{2x^3-2x^2-2x}{x^3-2x^2-x+2}\right)$

## Repaso de inecuaciones (más complicados):

**92.** Resolver:

**a)** $-7x\le -7$ (Sol: $x\ge 1$)

**b)** $\dfrac{(3x+1)(3x-1)}{6}+4x-5\ge\dfrac{(x+2)(x-2)}{2}+\dfrac{11}{6}$ [Sol: $x\in(-\infty,-5]\cup[1,\infty)$]

**c)** $\left.\begin{array}{r}2x-10>-x+2\\ 12-4x>-3x+2\\ 3(x+2)\ge 2(x+6)\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in[6,10)$]

**d)** $x^2<9$ [Sol: $x\in(-3,3)$]

**e)** $\dfrac{1}{x}\le x$ [Sol: $x\in[-1,0)\cup[1,\infty)$]

**f)** $1-\dfrac{3x-7}{5}>\dfrac{5x+4}{15}-\dfrac{x-1}{3}$ (Sol: $x<3$)

**g)** $3x^2+15x+21<0$ (Sol: ∄ soluc.)

**h)** $3x^2+15x+21>0$ (Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$)

**i)** $\dfrac{(x+2)(x-2)}{4}-\dfrac{x^2}{2}<\dfrac{(x^2-2x)(x^2+2x)}{4}-2$ [Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$]

**j)** $(x^2-4)(x^2-1)>0$

**k)** $(x^2-4)(x^2+4)<0$ [Sol: $x\in(-2,2)$]

**l)** $\dfrac{(x-2)^2}{2}+\dfrac{5x+6}{6}<\dfrac{(x+3)(x-3)}{3}+6$ [Sol: $x\in(0,7)$]

**m)** $\left.\begin{array}{r}\dfrac{5-3x}{4}-3(x+4)\le\dfrac{3(x+2)}{2}+2\\ \dfrac{2(2x+1)-(x-1)}{3}-\dfrac{2x+1}{5}<2\end{array}\right\}$ [Sol: $x\in[-3,2)$]

**n)** $\dfrac{x+3}{x-7}\le\dfrac{1}{2}$ [Sol: $x\in[-13,7)$]

## Resolución gráfica de sistemas:

**93.** Resolver **gráficamente** los siguientes sistemas de ecuaciones; resolverlos a continuación analíticamente (por el método deseado), y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

**a)** $\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$ (Sol: x=7, y=5)

**b)** $\left.\begin{array}{l} x+3y=6 \\ 2x-y=-2 \end{array}\right\}$ (Sol: x=0, y=2)

**c)** $\left.\begin{array}{l} x+3y=4 \\ 2x-y=1 \end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=1)

**d)** $\left.\begin{array}{l} 2x-5y=1 \\ 4x-10y=2 \end{array}\right\}$ (Sol: $\infty$ soluc, S.C.I.)

**e)** $\left.\begin{array}{l} x+2y=0 \\ 2x-y=5 \end{array}\right\}$ (Sol: x=2, y=−1)

**f)** $\left.\begin{array}{l} x-2y=4 \\ -2x+4y=6 \end{array}\right\}$ (Sol: $\nexists$ soluc, S.I.)

**g)** $\left.\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\}$ (Sol: x=3, y=1)

**h)** $\left.\begin{array}{l} x-2y=4 \\ 3x-6y=12 \end{array}\right\}$ (Sol: $\infty$ soluc, S.C.I.)

**i)** $\left.\begin{array}{l} x+3y=1 \\ 2x-y=2 \end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=0)

**j)** $\left.\begin{array}{l} y=x+1 \\ y=x-1 \end{array}\right\}$ (Sol: $\nexists$ soluc, S.I.)

**k)** $\left.\begin{array}{l} y=x^2-5x+6 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

## Resolución gráfica de inecuaciones:

**94.** Resolver **gráficamente** las siguientes inecuaciones de 2º grado; resolverlas a continuación analíticamente y comprobar que se obtiene idéntico resultado:

**a)** $x^2-6x+8\geq 0$ [Sol: $x\in(-\infty,2]\cup[4,\infty)$]

**b)** $x^2-2x-3<0$ [Sol: $x\in(-1,3)$]

**c)** $x^2-5x+6>0$ [Sol: $x\in(-\infty,2)\cup(3,\infty)$]

**d)** $x^2-3x-10\leq 0$ [Sol: $x\in[-2,5]$]

**e)** $3x^2-10x+7\geq 0$ [Sol: $x\in(-\infty,1]\cup[7/3,\infty)$]

**f)** $2x^2-16x+24<0$ [Sol: $x\in(2,6)$]

**g)** $x^2-4x+21\geq 0$ [Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]

**h)** $x^2-3x>0$ [Sol: $x\in(-\infty,0)\cup(3,\infty)$]

**i)** $x^2-4\geq 0$ [Sol: $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\infty)$]

**j)** $x^2-4x+4>0$ [Sol: $x\in\mathbb{R}-\{2\}$]

**k)** $x^2+6x+9\geq 0$ [Sol: $\forall x\in\mathbb{R}$]

**l)** $x^2+6x+9>0$ [Sol: $\forall x\in\mathbb{R}-\{-3\}$]

**m)** $x^2-2x+1<0$ [Sol: $\nexists$ soluc.]

**n)** $x^2-4x+4\leq 0$ [Sol: x=2]

**o)** $6x^2-5x-6<0$ [Sol: $x\in(-2/3,3/2)$]

**p)** $x^2-4x+7<0$ [Sol: $\nexists$ soluc.]

**r)** $2x^2-8x+6<0$ [Sol: $x\in(1,3)$]

**s)** $2x^2+10x+12\leq 0$ [Sol: $x\in[-3,-2]$]

**t)** $-x^2+5x-4\geq 0$ [Sol: $x\in[1,4]$]

## Notación científica:

**95.** Pasar a notación científica los siguientes números:

**a)** 300.000.000=

**b)** 456=

**c)** 0,5=

**d)** 0,0000000065=

**e)** 18.400.000.000=

**f)** 0,000001=

**g)** −78986,34=

**h)** 0,0000093=

**i)** 1.230.000.000.000=

**j)** 14 billones €=

**k)** 150 millones $=

**l)** 7,3=

**m)** 73=

**n)** 0,00010001=

**o)** 10=

**p)** 1=

**q)** 0,011001=

**r)** 16.730.000=

**s)** −345,45

**96.** Realizar las siguientes operaciones de dos formas distintas (y comprobar que se obtiene el mismo resultado):

- Sin calculadora, aplicando sólo las propiedades de las potencias.
- Utilizando la calculadora científica.

**a)** $2{,}5\cdot10^{7}+3{,}6\cdot10^{7}=$

**b)** $4{,}6\cdot10^{-8}+5{,}4\cdot10^{-8}=$

**c)** $1{,}5\cdot10^{6}+2{,}4\cdot10^{5}=$

**d)** $2{,}3\cdot10^{9}+3{,}25\cdot10^{12}=$

**e)** $3{,}2\cdot10^{8}-1{,}1\cdot10^{8}=$

**f)** $7{,}28\cdot10^{-3}-5{,}12\cdot10^{-3}=$

**g)** $4{,}25\cdot10^{7}-2{,}14\cdot10^{5}=$

**h)** $(2\cdot10^{9})\cdot(3{,}5\cdot10^{7})=$

**i)** $\dfrac{8{,}4\cdot10^{9}}{2\cdot10^{7}}=$

**j)** $\dfrac{(3{,}2\cdot10^{-3})\cdot(4\cdot10^{5})}{2\cdot10^{-8}}=$

**k)** $(2\cdot10^{5})^{2}=$

**97.** La estrella más cercana a nuestro sistema solar es $\alpha$-Centauri, que está a una distancia de tan sólo 4,3 años luz. Expresar, en km, esta distancia en **notación científica**. (Datos: velocidad de la luz: 300000 km/s; 1 año $\cong$ 365,25 días) ¿Cuántos años tardaría en llegar una sonda espacial viajando a 10 km/s?
(Sol: $4{,}068\cdot10^{13}$ km; $\cong$128907 años)

**98.** En una balanza de precisión pesamos cien granos de arroz, obteniendo un valor de 0,0000277 kg. ¿Cuántos granos hay en 1000 toneladas de arroz? Utilícese **notación científica**. (Sol: $3{,}61\cdot10^{12}$ granos)

**99.** Calcular el volumen aproximado (en $m^3$) de la Tierra, tomando como valor medio de su radio 6378 km, dando el resultado en **notación científica** con dos cifras decimales. $\left(\text{Volumen de la esfera}: \frac{4}{3}\pi r^3\right)$
(Sol: $1{,}08678\cdot10^{21}$ $m^3$)

**100.** La luz del Sol tarda 8 minutos y 20 segundos en llegar a la Tierra. Calcular la distancia Tierra-Sol, empleando **notación científica**. (Sol: $1{,}5\cdot10^{8}$ km)

## Miscelánea (más complicados):

**101. a)** Dado $P(x)=x^2-9$, hallar $P^4(x)$, por Tartaglia (Sol: $x^8-36x^6+486x^4-2916x^2+6561$)

**b)** Dado $Q(x)=3x-2$, se pide $Q^5(x)$, por Tartaglia (Sol: $243x^5-810x^4+1080x^3-720x^2+240x-32$)

**c)** Dados $R(x) = 2x^3+1$, hallar $R^3(x)$

**d)** Dados $S(x)=x^2-2x$, calcular $S^4(x)$

**102.** Determinar el polinomio de grado 3 que verifica: $P(-1)=P(2)=P(-3)=0$ y $P(-2)=18$

**103.** Hallar la $\cup$ e $\cap$ de los siguientes intervalos:

**a)** $A=[-2,5)$, $B=(1,7)$

**b)** $C=(0,3]$, $D=(2,\infty)$

**c)** $E=(-\infty,0]$, $F=(-3,\infty)$

**d)** $G=[-5,-1)$, $H=(2,7/2]$

**e)** $I=(-\infty,0)$, $J=[0,\infty)$

**f)** $K=(2,5)$, $L=(5,9]$

**g)** $M=[-3,-1)$, $N=(2,7]$

**h)** $O=(-3,7)$, $P=(2,4]$

**i)** $Q=[-2,5)$, $R=[3,\infty)$

**j)** $S=(0,3)$, $T=[9/2,\infty)$

**k)** $U=(-5,-1]$, $V=[-1,4]$

**l)** $W=(-1,3)$, $X=[3,\infty)$

**104. a)** ¿Qué otro nombre recibe el intervalo $[0,\infty)$? ¿Y $(-\infty,0]$?

**b)** ¿A qué equivale $\mathbb{R}^+ \cup \mathbb{R}^-$? ¿Y $\mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}^-$?

**105.** Resolver:

**a)** $x^6+7x^3-8=0$ (Sol: x=1, x=-2)

**b)** $x^6-64=0$ (Sol: $x=\pm 2$)

**c)** $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}+y=3\\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\end{array}\right\}$ (Sol: $x_1=1$; $y_1=2$; $x_2=2/5$; $y_2=1/2$)

**d)** $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x-9}=\sqrt{x-1}$ (Sol: x=5)

**e)** $\left.\begin{array}{l}y^2=2ax\\ x^2=ay\end{array}\right\}$ donde $a\in\mathbb{R}$ (Soluc: $x=a\sqrt[3]{2}$, $y=a\sqrt[3]{4}$)

**f)** $\sqrt[3]{x-2}=x$ (Sol: x=2)

**g)** $\left.\begin{array}{l}\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}\\ y-x^2=1\end{array}\right\}$ (Sol: x=1, y=2)

**h)** $\left.\begin{array}{l}y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}\\ y=\sqrt{x^3}\end{array}\right\}$ (Sol: x=1; y=1)

**106.** Resolver la ecuación $4x^3-6x^2-x=-\frac{3}{2}$, sabiendo que una de sus raíces es 1/2 (Sol: $x=\pm 1/2$, 3/2)

**107.** Resolver la ecuación $\sqrt[3]{x}=2\sqrt{x}-1$ (Ayuda: aplicar Tartaglia y Ruffini) (Sol: x=1)

**108.** Resolver:

**a)** $\left|x^2-3x\right|=4$ (Sol: $x_1=-1$, $x_2=4$)

**b)** $|2x-3|=|x+4|$ (Sol: $x_1=-1/3$; $x_2=7$)

**109. a)** Inventar una ecuación polinómica de grado 3 que tenga únicamente por soluciones x=-2, x=1 y x=3

**b)** Inventar una ecuación polinómica de grado 4 que tenga únicamente como raíces 1 y 2

**c)** Un polinomio de grado 3, ¿cuántas raíces puede tener como mínimo? Razonar la respuesta. (Sol: 1 raíz)

**110.** Simplificar las siguientes fracciones algebraicas:

**a)** $\dfrac{\frac{y}{1-y}}{\frac{y}{1-y}+1}=$ (Sol: y)

**b)** $\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{2x}{x^2-1}-\frac{1}{x+1}\right)=$ $\text{Sol}: \frac{1}{x}$

**c)** $\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}-\frac{a+b}{a-b}\right)\frac{a+b}{ab}=$ $\text{Sol}: -\frac{2}{a-b}$

**d)** $\dfrac{xy}{x^2-y^2}:\dfrac{x-y}{y}+\dfrac{y}{x-y}=$ $\qquad$ Sol : $\dfrac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

**e)** $x+\dfrac{2}{x-\dfrac{4}{x}}-\dfrac{x-1}{x-2}=$ $\qquad$ Sol : $\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$

**111.** Demostrar que: **a)** $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow\dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{a}{b}$ $\qquad$ **b)** $\dfrac{(a+b)^2}{4}-\dfrac{(a-b)^2}{4}=a\cdot b$

**112.** Transformar en potencias de exponente fraccionario la siguiente expresión, operar y simplificar:

$$\sqrt{3\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3}}}=$$

**113.** Despejar x y simplificar:

$$x^2+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2=1$$

$\left(\text{Sol}: x=\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}\right)$

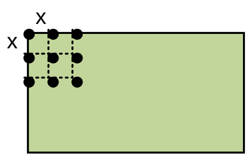
**114.** Demostrar que son ciertas las siguientes igualdades:

**a)** $2\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)$ $\qquad$ **b)** $2\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)$

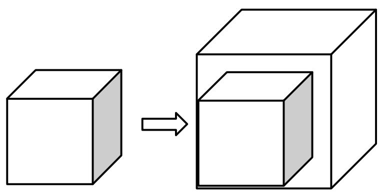
**115.** Dos árboles de 15 m y 20 m de altura están a una distancia de 35 m. En la copa de cada uno hay una lechuza al acecho. De repente, aparece entre ellos un ratoncillo, y ambas lechuzas se lanzan a su captura a la misma velocidad, llegando simultáneamente al lugar de la presa. ¿A qué distancia de cada árbol apareció el ratón? (Ayuda: Si se lanzan a la misma velocidad, recorren el mismo espacio, pues llegan a la vez; aplicar el teorema de Pitágoras, y plantear un SS.EE. de 2º grado) (Sol: a 15 m del árbol más alto)

**116.** Calcular la velocidad y el tiempo que ha invertido un ciclista en recorrer una etapa de 120 km sabiendo que, si hubiera ido 10 km/h más deprisa, habría tardado una hora menos. (Sol: v=30 km/h; t=4 h)

**117.** En un terreno rectangular de lados 64 m y 80 m se quieren plantar 357 árboles formando una cuadrícula regular. ¿Cuál será el lado de esa cuadrícula? (Ayuda: En el lado menor, por ejemplo, hay 64/x cuadrículas, y un árbol más que el número de cuadrículas) (Sol: x=4 m)




**118.** Al aumentar en 1 cm la arista de un cubo su volumen aumenta en 271 cm$^3$. ¿Cuánto mide la arista? (Ayuda: plantear una ecuación de 3$^{er}$ grado) (Sol: 9 cm)



**119.** Un ganadero decide repartir una manada de 456 caballos entre sus hijos e hijas. Antes del reparto se enfada con los dos únicos varones, que se quedan sin caballos. Así, cada hija recibe 19 cabezas más. ¿Cuántas hijas tiene el ganadero? (Sol. 6 hijas)

**120.** Una cuadrilla de vendimiadores tiene que vendimiar dos fincas, una de las cuales tiene doble superficie que la otra. Durante medio día trabajó todo el personal de la cuadrilla en la finca grande; después de la comida, una mitad de la gente quedó en la finca grande y la otra mitad trabajó en la pequeña. Durante esa tarde fueron terminadas las dos fincas, a excepción de un reducido sector de la finca pequeña, cuya vendimia ocupó el día siguiente completo a un solo vendimiador. ¿Con cuántos vendimiadores contaba la cuadrilla? (Ayuda: Llamar x al nº de vendimiadores y s a la superficie que vendimia una persona en media jornada, y plantear una ecuación, ¡no un sistema!) (Sol. 8 vendimiadores)