SOLUCIONES A LOS EJERCICIOS

Ejercicio nº 1.-

a) Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$\log \frac{1}{10} + \log_2 \sqrt{32} - \log_2 \frac{1}{4}$$

b) Sabiendo que $\log k = 1{,}1$ calcula $\log\left(10k^3\right)$.

Solución:

$$a)\ \log 10^{-1} + \log_2 2^{5/2} - \log_2 2^{-2} = -1 + \frac{5}{2} - (-2) = -1 + \frac{5}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$$b)\ \log\left(10k^3\right) = \log 10 + \log k^3 = \log 10 + 3\log k = 1 + 3 \cdot 1{,}1 = 1 + 3{,}3 = 4{,}3$$

Ejercicio nº 2.-

Resuelve:

a) $\left.\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = 6 \end{array}\right\}$

b) $\dfrac{x-4}{2} - \dfrac{x+1}{3} \le \dfrac{1}{6}$

Solución:

a) $y = \dfrac{6}{x} \quad \rightarrow \quad x^2 + \dfrac{36}{x^2} = 13 \quad \rightarrow \quad x^4 + 36 = 13x^2 \quad \rightarrow \quad x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Cambio: $x^2 = z$. Así: $z^2 - 13z + 36 = 0$

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} z = 9 & \rightarrow \quad x = \pm 3 \\ z = 4 & \rightarrow \quad x = \pm 2 \end{cases}$$

$$\textit{Soluciones}: \begin{cases} x_1 = -3 \\ y_1 = -2 \end{cases} \begin{cases} x_2 = 3 \\ y_2 = 2 \end{cases} \begin{cases} x_3 = -2 \\ y_3 = -3 \end{cases} \begin{cases} x_4 = 2 \\ y_4 = 3 \end{cases}$$

b) $3(x-4) - 2(x+1) \le 1$

$3x - 12 - 2x - 2 \le 1$

$x \leq 15 \quad \rightarrow \quad \text{Intervalo} \quad (-\infty, 15]$.

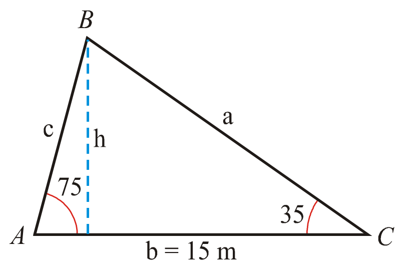
Ejercicio nº 3.-

En un triángulo, *ABC*, conocemos:

$\boldsymbol{b = 15 \text{ m}, \ \hat{A} = 75^\circ, \ \hat{C} = 35^\circ}$

Calcula el otro ángulo, los otros dos lados y la altura correspondiente al vértice *B*.

Solución:



- El ángulo $\hat{B}$ *lo* obtenemos así :

$$\hat{B} = 180^\circ - \left(\hat{A} + \hat{C}\right) = 70^\circ$$

- Aplicamos el teorema de los senos para hallar los otros dos lados:

$$\frac{a}{sen\hat{A}} = \frac{b}{sen\hat{B}} = \frac{c}{sen\hat{C}} \quad \rightarrow \quad \frac{a}{sen75^\circ} = \frac{15}{sen70^\circ} = \frac{c}{sen35^\circ} \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad a = \frac{15sen75^\circ}{sen70^\circ} = 15{,}42 \text{ m} \quad \text{y} \quad c = \frac{15sen35^\circ}{sen70^\circ} = 9{,}16 \text{ m}$$

- Hallamos la altura correspondiente al vértice *B*:

$$sen75^\circ = \frac{h}{c} \quad \Rightarrow \quad h = c \cdot sen75^\circ = 9{,}16 \cdot sen75^\circ = 8{,}85 \text{ m}$$

Ejercicio nº 4.-

a) Demuestra la siguiente igualdad:

$$\boldsymbol{\frac{cosx - senx}{cosx + senx} - \frac{1}{cos2x} = -tg2x}$$

b) Resuelve:

$$\boldsymbol{sen^2 x = 1 + cos^2 x}$$

Solución:

a) $\dfrac{cosx - senx}{cosx + senx} - \dfrac{1}{cos2x} = \dfrac{(cosx - senx)(cosx - senx)}{(cosx + senx)(cosx - senx)} - \dfrac{1}{cos2x} =$

$$= \frac{cos^2 x + sen^2 x - 2senxcosx}{cos^2 x - sen^2 x} - \frac{1}{cos2x} =$$

$$= \frac{1 - sen2x}{cos2x} - \frac{1}{cos2x} = \frac{1 - sen2x - 1}{cos2x} = \frac{-sen2x}{cos2x} = -\operatorname{tg}2x$$

b) $sen^2 x = 1 + cos^2 x \quad \rightarrow \quad sen^2 x = 1 + 1 - sen^2 x \quad \rightarrow \quad 2sen^2 x = 2$

$$sen^2 x = 1 \begin{cases} senx = 1 \quad \rightarrow \quad x_1 = 90^\circ + 360^\circ k \quad \rightarrow \quad x_1 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k \\ senx = -1 \quad \rightarrow \quad x_2 = 270^\circ + 360^\circ k \quad \rightarrow \quad x_2 = \dfrac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \quad \text{con } k \in \boldsymbol{Z}$$

Ejercicio nº 5.-

a) Escribe en forma binómica $z = 2_{30^\circ}$

b) Halla su opuesto y su conjugado en forma binómica y polar.

c) Representa z, $-z$ y $\bar{z}$.

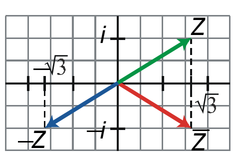
Solución:

a) $z = 2_{30^\circ} = 2(\cos 30^\circ + i sen 30^\circ) = 2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$

b) *Opuesto*: $-z = -\sqrt{3} - i = 2_{210^\circ}$

Conjugado: $\bar{z} = \sqrt{3} - i = 2_{330^\circ}$

c)



Ejercicio nº 6.-

Efectúa:

a) $\dfrac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}$

b) $\sqrt[4]{-1}$

Solución:

a) $\dfrac{i^{30}(2+3i)}{(4-i)}=\dfrac{i^{2}(2+3i)}{(4-i)}=\dfrac{(-1)(2+3i)}{(4-i)}=\dfrac{-2-3i}{4-i}=$

$$=\frac{(-2-3i)(4+i)}{(4-i)(4+i)}=\frac{-8-2i-12i-3i^2}{16-i^2}=\frac{-8-14i+3}{16+1}=$$

$$=\frac{-5-14i}{17}=\frac{-5}{17}-\frac{14}{17}i$$

b) $\sqrt[4]{-1}=\sqrt[4]{1_{180^\circ}}=1_{\frac{180^\circ+360^\circ n}{4}}=1_{45^\circ+90^\circ n}$ para $n=0,1,2,3$

Las cuatro raíces son:

$$1_{45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$1_{135^\circ}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$1_{225^\circ}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$
$$1_{315^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$$

Ejercicio nº 7.-

Halla las coordenadas del punto P que divide al segmento de extremos $A(2,-1)$ y $B(3,2)$ en dos partes, tales que $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PA}$.

Solución:

Llamamos $P(x,y)$. Se tiene que cumplir que: $\overrightarrow{BP}=3\overrightarrow{PA}$.

Como $\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BP}=(x-3,\,y-2)\\ \overrightarrow{PA}=(2-x,\,-1-y)\end{array}\right\}$, ha de ser:

$(x-3,\,y-2)=3(2-x,\,-1-y)$, es decir:

$$\left.\begin{array}{l} x-3=3(2-x) \\ y-2=3(-1-y) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x-3=6-3x \\ y-2=-3-3y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 4x=9 \\ 4y=-1 \end{array}\right\} \quad x=\frac{9}{4},\ y=\frac{-1}{4}$$

Por tanto, $P\left(\frac{9}{4}, \frac{-1}{4}\right)$.

Ejercicio nº 8.-

Dadas las rectas:

$$r: \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \end{cases} \qquad r': \begin{cases} x = 3+s \\ y = 2-2s \end{cases}$$

a) Halla el ángulo que forman r y r'.
b) Halla la distancia del punto $P(1, 1)$ a la recta r.

Solución:

a) El ángulo que forman r y r' es el ángulo que forman sus vectores directores:

$\vec{v}_r(2, 1)$ y $\vec{v}_{r'}, (1, -2)$

$\vec{v}_r \cdot \vec{v}_{r'} = (2, 1)\cdot(1, -2) = 2-2=0 \quad \Rightarrow \quad$ Son perpendiculares.

Forman un ángulo de $90°$.

b) • Hallamos la ecuación general o implícita de la recta r:

$$t=y+1 \quad \to \quad x=1+2(y+1) \quad \to \quad x=1+2y+2 \quad \to \quad x-2y-3=0$$

• Calculamos la distancia:

$$dist(P, r) = \frac{|1-2\cdot 1-3|}{\sqrt{1+(-2)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ u}$$

Ejercicio nº 9.-

a) Describe la siguiente cónica y represéntala gráficamente:

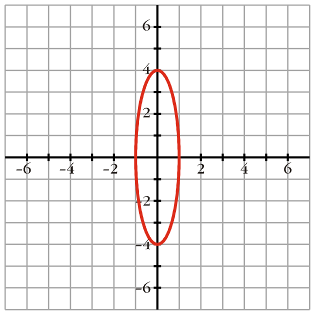
$$\mathbf{16x^2 + y^2 = 16}$$

b) ¿Cuáles son sus focos?

Solución:

a) $16x^2 + y^2 = 16 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

Es una elipse de semiejes 1 y 4. Su gráfica es:



b) Puesto que $a^2 - b^2 = c^2$, $a^2 = 16$ y $b^2 = 1 \;\rightarrow\; c = \pm\sqrt{15}$

Los focos son $F\left(0, \sqrt{15}\right)$ y $F'\left(0, -\sqrt{15}\right)$.

<u>Ejercicio nº 10.-</u>

Resuelve los siguientes límites y representa gráficamente los resultados obtenidos:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$

b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18}$

Solución:

a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

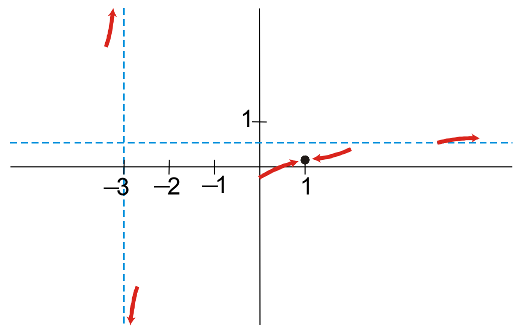
b) $\displaystyle \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \frac{1}{2}$

c) $\displaystyle \lim_{x \to -3} \frac{x^2 + 3x}{2x^2 + 12x + 18} = \lim_{x \to -3} \frac{x(x+3)}{2(x+3)^2} = \lim_{x \to -3} \frac{x}{2(x+3)}$

Hallamos los límites laterales:

$\displaystyle \lim_{x \to -3^-} \frac{x}{2(x+3)} = +\infty; \quad \lim_{x \to -3^+} \frac{x}{2(x+3)} = -\infty$

• Representación:



Ejercicio nº 11.-

Calcula $f'(x)$ en cada caso:

a) $f(x) = 8x^5 - 2x^3 + \frac{1}{3}$

b) $f(x) = (x^4 - 3x)e^x$

c) $f(x) = sen\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$

Solución:

a) $f'(x) = 40x^4 - 6x^2$

b) $f'(x) = (4x^3 - 3)e^x + (x^4 - 3x)e^x = (4x^3 - 3 + x^4 - 3x)e^x = (x^4 + 4x^3 - 3x - 3)e^x$

c) $f'(x) = cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} =$

$$= cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right) \cdot \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} \cdot cos\left(\frac{x}{x^2 - 1}\right)$$

Ejercicio nº 12.-

Consideremos la función:

$$f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$$

a) Obtén la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

b) Halla los tramos en los que la función crece y en los que decrece.

Solución:

a) • $f'(x) = 3x - 2$

• La pendiente de la recta es $f'(2) = 4$.

• Cuando $x = 2$, $y = 3$.

• La recta será:

$$y = 3 + 4(x - 2) = 3 + 4x - 8 = 4x - 5$$

b) • Estudiamos el signo de la derivada:

$$3x - 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad 3x > 2 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{2}{3}$$

$$3x - 2 < 0 \quad \Rightarrow \quad 3x < 2 \quad \Rightarrow \quad x < \frac{2}{3}$$

• Es decreciente en $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ y creciente en $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$, y tiene un mínimo en $x = \frac{2}{3}$.

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

a) Estudia la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 2x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

b) Represéntala gráficamente.

Solución:

a) • Si $x \neq 0$, la función es continua.

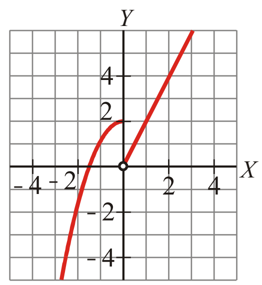
• Si $x = 0$:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \left(2 - x^2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \left(2x\right) = 0 \end{array}\right\} \text{Son distintos. La función es discontinua en } x = 0.$$

b) • Si $x \leq 0$, es un trozo de parábola.

• Si $x > 0$, es un trozo de recta.

• La gráfica es:



Ejercicio nº 14.-

a) Representa gráficamente la función:

$$\boldsymbol{f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x}$$

b) A partir de la gráfica, averigua el dominio de $\boldsymbol{f(x)}$, estudia su continuidad y di cuáles son los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función.

Solución:

a) • $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3+3x^2+3x\right)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^3+3x^2+3x\right)=+\infty$

• Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to x^3+3x^2+3x = x\left(x^2+3x+3\right)=0$

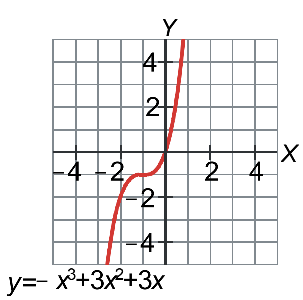
$$\begin{cases} x = 0 & \to \text{ Punto } (0,0) \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{9-12}}{2} & \to \text{ No tiene solución} \end{cases}$$

Con el eje $Y \to x=0 \to y=0 \to$ Punto $(0,0)$

• Puntos singulares:

$$f'(x) = 3x^2+6x+3 = 3\left(x^2+2x+1\right) = 3(x+1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow \quad x=-1 \quad \to \quad \text{Punto } (-1,-1)$$

• Gráfica:



b) • Dominio = **R**

- Es una función continua.
- Es una función creciente.

<u>Ejercicio nº 15.-</u>

a) Dibuja la gráfica de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2}$$

b) Sobre la gráfica anterior, estudia la continuidad y los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$.

Solución:

a) • Dominio $= \mathbf{R} - \{0\}$

- Puntos de corte con los ejes:

Con el eje $X \to \quad x+1=0 \quad \to \quad x=-1 \quad \to \quad$ Punto $(-1, 0)$.

Con el eje $Y \to$ No corta al eje Y, pues $x = 0$ no está en el dominio.

- Asíntota vertical: $x = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$

- Asíntota horizontal : $y = 0$

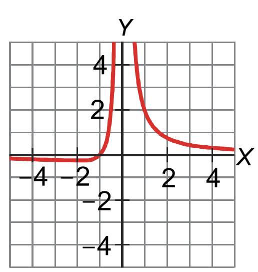
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0 \quad ; \quad \lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$$

- Puntos singulares :

$$f'(x) = \frac{x^2 - (x+1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{x(x-2x-2)}{x^4} = \frac{-x-2}{x^3} = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = -2 \quad \to \quad \text{Punto}\left(-2, \frac{-1}{4}\right).$$

- Gráfica :



b)

- Continuidad:

Si $x \neq 0$, es continua.

En $x = 0$ es discontinua, pues tiene una rama infinita (asíntota vertical).

- Creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$.